Toningenieursprojekt

Alternative Diskretisierungen zur Auswertung des Rayleigh-Integrals basierend auf der Fourier-Methode

Manuel Pagavino

Betreuung: Dr Franz Zotter Graz, 22. Mai 2019





institut für elektronische musik und akustik

Zusammenfassung

Diese Projektarbeit befasst sich mit der numerischen Auswertung von Schallfeldern ebener Strahler basierend auf der räumlichen Fouriermethode. Durch die Möglichkeit der schnellen Transformation lässt sich das Rayleigh-Integral auf rechnerisch effiziente Weise lösen, was die Anfänge der akustischen Nahfeldholografie ermöglichte. Der effiziente Algorithmus ist keine Voraussetzung mehr, könnte aber zeitliche Vorteile haben und wird hier noch einmal aufgegriffen. Der Umweg über den diskreten Wellenzahlraum bewirkt: (i) dass durch die direkte Diskretisierung der Ausbreitungsfunktion im Wellenzahlraum wird die Wellenausbreitung parallel zur Grenzfläche an manchen Frequenzen singulär wird, und dass (ii) die inhärente Periodisierung der Schallquelle im Ortsbereich insbesondere für zur Grenzfläche geneigten Wellenausbreitung Interferenzerscheinungen hinzukommen. Möglichkeiten zur Minderung dieser durchaus gewichtigen Effekte werden diskutiert. Als mögliche Abhilfe zur Singularität wird die numerische Integration in 2D unter Verwendung einer rechteckigen und dreieckigen Interpolationfunktion vorgeschlagen, in 3D mit einem trapezförmigen Interpolanten. Die Ergebnisse der FFT-basierten Schallausbreitungsrechnung werden mit den korrekten Ergebnissen des im Ortsbereich diskretisierten Rayleigh-Integrals verglichen. Die vorgeschlagene numerische Interpolation im Verbund mit zusätzlichem Auffüllen mit Nullen (zero padding) im Ortsbereich führen zu deutlichen Verbesserungen in einer Fourier-basierten Schallfeldsimulation.

abstract

This audio engineering project deals with the numerial evaluation of sound fields from plane radiators, based on the spatial Fourier method. By the means of the fast Fourier transform it is possible to evaluate the Rayleigh integral at high computational efficiency, a feature that made the near field holography popular in its beginnings. Nowaday, efficiency of the implementation is not a pre-requisite anymore, but it could potentially be advantageous, therefore it is reconsidered in this work. The calculation in via the discrete wave-number domain implies: (i) by the discretization of the propagator, waves propagating in parallel to the radiating plane get singular at some frequencies, and (ii) the inherent spatial periodization of the sound source deteriorates the simulation of waves propagating into directions inclined with regard to the plane by interference. The work shows up possible strategies to mitigate these effects. As a thinkable remedy concerning the singularity, numerical integration using a rectangular or triangular interpolant is proposed in 2D, and a trapezoidal one in 3D. The results of FFT-based holography are compared with the correct results of the discretized Rayleigh integral. The proposed numerical integral together with zero padding in the space domain lead to a clear improvement of the Fourier-based sound field simulation.

Inhaltsverzeichnis

1	Abs	trahlungsproblem in 2D	4
	1.1	Helmholtzgleichung in 2D	4
	1.2	Wellenzahlraum	5
	1.3	Randwertaufgabe	6
		1.3.1 Schalldruckvorgabe	6
		1.3.2 Druckgradient-/Schnellevorgabe	9
	1.4	Physikalisch korrekter Ausbreitungsterm in 2D	11
	1.5	Regularisierung in 2D durch Glättungsfunktionen zur numerischen Inte-	
		gration	15
		1.5.1 Rechteckfunktion	15
		1.5.2 Dreiecksfunktion	23
	1.6	Schallfeldauswertung in 2D	27
2	Abs	trahlungsproblem in 3D	31
	2.1	Helmholtzgleichung in 3D	31
	2.2	Randwertaufgabe	33
		2.2.1 Schalldruckvorgabe	33
		2.2.2 Druckgradient-/Schnellevorgabe	35
	2.3	Physikalisch korrekter Ausbreitungsterm in 3D	38
	2.4	Regularisierung in 3D durch Glättungsfunktionen zur numerischen Inte-	
		gration	42
		2.4.1 3D Rechteckfunktion	42
		2.4.2 Approximation mit konstantem Radius	53
	2.5	Schallfeldauswertung in 3D	58
		2.5.1 Kolbenschwinger	58
		2.5.2 Platte	62
3	Zusa	ammenfassung und Conclusio	65
4	Lite	ratur	67

1 Abstrahlungsproblem in 2D

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Regularisierung von auftretenden Singularitäten bei der Schallausbreitungssimulation ebener Strahler mit Hilfe der Fourier-Akustik. Die in dieser Arbeit genannten theoretischen Zusammenhänge werden in der gängigen Literatur (z.B. [Wil99, DMWL85, Sch08, Fle87]) zur akustischen Nahfeldholografie (NAH) und Schallfeldrekonstruktion verwendet. Die behandelte Frage der Singularität in der Ausbreitungsfunktion wurde in der Vorlesung "Akustische Holografie und Holofonie" (z.B. [Zot13, Zot14, Zot16]) an der KUG, in den Wintersemestern 2010 bis 2015, sowie in den Laboren "Akustische Messtechnik 2/Akustische Holografie und Holofonie " (z.B. [Zot12, Zot11, Zot10]) von 2008 bis 2015 als Unsauberkeit betrachtet, deren Hintergrund in dieser Arbeit aufgeklärt und eine mögliche Abhilfe dafür vorschlagen werden kann. Das Problem besteht hauptsächlich in der Schallausbreitungssimulation, die NAH an sich ist davon nicht betroffen.

1.1 Helmholtzgleichung in 2D

Als Lösung der homogenen Helmholtzgleichung in 2D wird der Produktansatz $p_h = e^{-jk_xx}e^{-jk_yy} = e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}}$ gewählt, der eine Linearkombination von ebenen Wellen darstellt. Dabei entspricht $\mathbf{r} = [x, y]^T$ dem Ortsvektor im Aufpunkt und $\mathbf{k} = [k_x, k_y]^T$ dem räumlichen Wellenvektor, der die beiden Ortswellenzahlen in x- und y-Richtung enthält. Durch das Einsetzen des Lösungsansatzes in die Helmholtzgleichung erhält man die charakteristische Gleichung

$$\mathbf{k}^T \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 = k^2 \tag{1}$$

wobei $k = \frac{\omega}{c}$ der (Schwing-)Wellenzahl entspricht. Alle Wellenzahlen, die für die Lösung der Helmholtzgleichung in Frage kommen, müssen die charakteristische Gleichung erfüllen. Für gültige Lösungen besteht somit eine unabdingbare Abhängigkeit zwischen den Komponenten des Wellenvektors und der Wellenzahl k, wodurch sich die folgende kompakte Notation für alle möglichen homogenen Lösungen ergibt

$$p_h = e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}}\delta(\mathbf{k}^T\mathbf{k} - k^2). \tag{2}$$

Ein 2-dimensionales Schallfeld lässt sich durch die Superposition aller zulässigen homogenen Lösungen beschreiben. Somit ergibt sich der Schalldruck in einem beliebigen Aufpunkt aus dem Integral

$$p(\mathbf{r}) = \iint_{\mathbb{C}^2} \psi(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}^T \mathbf{k} - k^2) e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k}$$
$$= \iint_{\forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2: \mathbf{k}^T \mathbf{k} = k^2} \psi(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k}.$$
(3)

Der Koeffizient $\psi(\mathbf{k})$ entspricht dabei der komplexen Amplitude der jeweiligen ebenen Welle und wird auch *Wellenzahlspektrum* genannt.

1.2 Wellenzahlraum

Der Wellenvektor k liegt im sogenannten Wellenzahlraum oder *k-space*, dessen Definitionsbereich \mathbb{C}^2 durch die charakteristische Gleichung festgelegt wird. Er enthält somit nur Wellenzahlen, die auch zu gültigen Lösungen der Helmholtzgleichung führen.

Betrachten wir zunächst den Fall von rein reellwertigen Ortswellenzahlen $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. Gemäß Gleichung (1) muss sich k auf einem Kreis befinden und lässt sich somit alternativ durch den Richtungsvektors des Polarwinkels φ am Einheitskreis $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ skaliert mit der Wellenzahl k beschreiben:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} = k\boldsymbol{\theta} = k \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$
(4)

Unter dieser Annahme lässt sich die Ortsfunktion des Schalldrucks (3) auch als Ringintegral über den Einheitskreis darstellen

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \psi(\mathbf{k}) e^{-j\boldsymbol{\theta}^{T}(\varphi)\mathbf{r}} \mathrm{d}\varphi.$$
 (5)

Das resultierende Schallfeld wird als Überlagerung von ebenen Wellen beschrieben, die sich mit unterschiedlicher Amplitude und Phase in die verschiedenen, den Polarwinkeln zugehörigen Raumrichtungen ausbreiten.

Erweitert man nun den Definitionsbereich des Wellenzahlraumes auf die komplexe Zahlenebene \mathbb{C}^2 lassen sich noch weitere Lösungen finden, welche die charakteristische Gleichung (1) erfüllen. Die Komponenten des Wellenvektors können somit auch außerhalb des Kreises liegen, sofern zumindest eine der beiden Ortswellenzahlen imaginäre Werte annimmt. Die zugehörigen Lösungen beschreiben die sogenannten evaneszenten Wellen, welche normal zu ihrer Ausbreitungsrichtung einen exponentiell abklingenden Amplitudenverlauf aufweisen. Solche Wellenanteile entstehen immer im Nahfeld von Grenzflächen, auf denen sich feingliedrige Oberflächenchwingungen mit sehr kleinen Wellenlängen ausbilden. Sie können sich nicht in das umliegende Fernfeld ausbreiten und kennzeichnen somit einen akustischen Kurzschluss.

1.3 Randwertaufgabe

Durch die örtliche Vorgabe einer Schallfeldgröße entlang der x-Achse bei $y_0 = 0$ lässt sich die Abstrahlung von Schall als klassisches Randwertproblem formulieren. Es existieren grundsätzlich drei Arten solcher Probleme. Entweder wird der Schalldruck $p(\mathbf{r_0})$ (Dirichlet-Problem), der Normalgradient des Schalldrucks $\frac{\partial}{\partial n}p(\mathbf{r_0}) = \nabla p(\mathbf{r_0})\mathbf{n}$ (Neumann-Problem) oder beide Schallfeldgrößen (Robin-Problem) entlang der Bezugslinie vorgegeben. Im Folgenden soll nun die Anwendbarkeit der Fourier-Akustik für die Lösung der ersten beiden Randwertprobleme untersucht werden.

1.3.1 Schalldruckvorgabe

Ohne hierbei eine spätere Verallgemeinerung auf andere Signale zu verhindern, kann hier wie üblich von einer monofrequenten Druckvorgabe ausgegangen werden. Die örtliche Verteilung des Schalldrucks $p(\mathbf{r}_0) = p(x, y = 0)$ wird entlang der x-Achse bei $y_0 = 0$ vorgegeben und das resultierende Schallfeld $p(\mathbf{r}) = p(x, y)$ soll nun entlang einer beliebigen Linie für positive y = const. ermittelt werden. Durch diese örtliche Vorgabe reduziet sich die Abhängigkeit auf jene zur Ortswellenzahl k_x und das Wellenzahlspektrum ist dadurch bestimmt. Ist zusätzlich die Wellenzahl k aus der schwingenden Frequenz und Schallgeschwindikeit bekannt, ist durch die charakteristische Gleichung (1) auch die Ortswellenzahl k_y und damit die zugehörige Elementarwelle in y-Richtung bestimmt. Je nachdem welche Werte k_x annimmt, breitet sich die Elementarwelle in y-Richtung ungedämpft in das Fernfeld aus oder klingt normal zu ihrer Ausbreitungsrichtung exponentiell ab. Will man nun das homogene Schallfeld an einem beliebigen Aufpunkt beschreiben, so reduziert sich das eigentlich zweidimensionale Problem durch die charakteristische Kopplung zwischen den beiden Ortswellenzahlen auf ein eindimensionales Problem, dessen Lösung gegeben ist durch

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\psi_0(k_x) e^{-jk_y(k_x)y}}_{\mathcal{F}\{p(\mathbf{r})\}} e^{-jk_x x} \mathrm{d}k_x = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{p(\mathbf{r})\}\}.$$
 (6)

Hierbei ist $\psi_0(k_x)$ das Wellenzahlspektrum oder auch die Fouriertransformierte der Schalldruckvorgabe in der Linie bei y = 0. Dieses lässt sich einfach durch die Fouriertransformation der örtlichen Schalldruckvorgabe berechnen

$$\psi_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}_0) e^{jk_x x} \mathrm{d}x = \mathcal{F}\{p(\mathbf{r}_0)\}.$$
(7)

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (6) und (7) lässt sich das gesamte Schallfeld im oberen Halbraum beschreiben.

y > 0:

$$\mathcal{F}\{p(\mathbf{r})\} = \psi_0(k_x)e^{-jk_y(k_x)(y-y_0)} = \psi_0(k_x)e^{-jk_y(k_x)y}.$$
(8)

Die komplexen Amplituden der Elementarwellen, so $|k_x| \leq k$, unterliegen hierbei lediglich einer Phasenänderung bei der Extrapolation des Wellenspektrums von der einen horizontalen Linie bei y=0 zur anderen bei y. Für $|k_x| > k$ ergibt der Ausbreitungsterm eine reine Amplitudendämpfung. Somit reduziert sich die Lösung der Randwertaufgabe im Wellenzahlbereich auf eine simple Multiplikation des vorgegebenen Wellenspektrums mit einer komplexen Übertragungsfunktion

$$G_{pp} = |G_{pp}|e^{j\angle(G_{pp})} = e^{-jk_y(k_x)y},$$
(9)

die sowohl vom Abstand y, der Schwingwellenzahl k als auch von der Ortswellenzahl k_x abhängig ist. Diese Übertragungsfunktion wird nun zum Gegenstand der folgenden Analyse. Um das Fourierintegral in Gleichung (6) in dieser Form einsetzen zu können, muss von reellwertigen Ortswellenzahlen $k_x \in \mathbb{R}$ ausgegangen werden. Daraus ergibt sich für die abhängige Ortswellenzahl k_y die folgende Beziehung

$$k_y(k_x) = \begin{cases} \sqrt{|k^2 - k_x^2|} \in \mathbb{R}_0^+, & k_x^2 \le k^2 \\ -j\sqrt{|k^2 - k_x^2|} \in \mathbb{I}^-, & k_x^2 > k^2 \end{cases}$$
(10)



Abbildung 1 – Definitionsbereich der Ortswellenzahlen (siehe [Zot13])

Somit ist gleichzeitig auch der Betrag und Phasenwinkel der Übertragungsfunktion eindeutig definiert:

$$|G_{pp}| = \begin{cases} 1, & k_x^2 \le k^2, \\ e^{-\sqrt{|k^2 - k_x^2|y}}, & k_x^2 > k^2, \end{cases}$$
(11)

$$\angle G_{pp} = \begin{cases} -\sqrt{|k^2 - k_x^2|}y, & k_x^2 \le k^2, \\ 0, & k_x^2 > k^2. \end{cases}$$
(12)



Abbildung 2 – Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion G_{pp} zur Schalldruckausbreitung

Die Auswertung des Wellenspektrums in der Bezugslinie y = 0 in der es vorgegeben wird muss auch nach der Filterung das unveränderte Wellenspektrum ergeben. Daher ergibt sich für den Fall y = 0 ein konstanter Betragsverlauf über den gesamten Wellenzahlbereich. Bei der Extrapolation des Wellenspektrums auf Linien y > 0 stellt sich eine deutliche Tiefpasscharakteristik ein. Dabei ist die Grenzfrequenz des Tiefpass gegeben durch die Schwingwellenzahl k, die formal den Übergang zwischen ebenen Wellen und evaneszenten Wellen markiert. Im Durchgangsbereich $|k_x| \le k$ ergibt sich ungeachtet des Abstandes ein konstanter Betragsverlauf. Die zugehörigen Komponenten des Wellenspektrums können sich somit ungehindert in das Fernfeld fortpflanzen ohne eine Dämpfung zu erfahren und beschreiben damit die ebenen Wellen. Oberhalb der Schwingwellenzahl für $|k_x| > k$ macht sich eine zunehmende Dämpfung mit größer werdender Ortswellenzahl bemerkbar. Die Flankensteilheit des Tiefpass nimmt zusätzlich mit wachsendem Abstand y zu, bis sich schließlich bei unendlich großem Abstand $y = \infty$ ein ideales Tiefpassfilter ergibt. Die Komponenten des Wellenspektrums erfahren in diesem Bereich eine mit dem Abstand einhergehende sukzessive Dämpfung in y-Richtung bis sie irgendwann vollständig unterdrückt werden. Wir erhalten hier somit reine Nahfelder bestehend aus evaneszenten Wellen.

Betrachtet man nun den Phasengang der Übertragungsfunktion lässt sich im Bereich $|k_x| < k$ naturgemäß ein Nacheilen der Phase in Abhängigkeit zur Entfernung erkennen. Mit größer werdender Ortswellenzahl k_x wird diese Phasenverschiebung zwischen den Abständen zunehmend kleiner bis schließlich im Bereich $k_x > k$ alle Entfernungen den Phasenwert Null (unverzögert, aber gedämpft) aufweisen.

1.3.2 Druckgradient-/Schnellevorgabe

Anstelle des Schalldrucks kann auch sein Normalgradient vorgegeben werden (Neumann-Problem). Gemäß der Eulergleichung beschreibt dieser über einen Proportionalitätsfaktor die Normalkomponente der Schallschnelle.

$$\nabla^T p \mathbf{n} = -j\omega \rho \mathbf{v}_n. \tag{13}$$

Wird nun zum Beispiel durch eine unendlich ausgedehnte Membran ein Schallschnelleverlauf entlang der x-Achse bei y = 0 vorgegeben, kann die Auswertung des resultierende Schallfeld auf analoge Weise zur Schalldruckvorgabe erfolgen. Dafür ist es zuvor jedoch nötig das zugehörige Wellenspektrum $\psi_0(k_x)$ in der Bezugsebene zu bestimmen. Dafür muss die vorgegebene y-Komponente der Schallschnelle in den Wellenzahlbereich transformiert und anschließend mit einer Übertragungsfunktion beaufschlagt werden, welche aus der Normalkomponente der Eulergleichung hervorgeht.

$$\nu_{y,0}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{y,0}(x) e^{jk_x x} \mathrm{d}x$$
(14)

$$-jk_y\psi(k_x) = -j\omega\rho\nu_y(k_x) \quad \to \quad \psi_0(k_x) = \omega\rho\frac{1}{k_y}\nu_{y,0}(k_x) = \omega\rho G_{vp}\nu_{y,0}(k_x) \quad (15)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion ohne den Verstärkungsfaktor $\omega \rho$ entspricht dem Reziprokwert der abhängigen Ortswellenzahl $k_y(k_x)$. Dadurch ergibt sich ein Wurzelterm im Quotienten, der gemäß Gleichung (10) abhängig von k_x entweder rein reelle oder rein imaginäre Form annimmt. Die Übertragungsfunktion lässt sich wieder in Betrag und Phasenwinkel unterteilen, was zu den folgenden Ausdrücken führt:

$$|G_{vp}| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|k^2 - k_x^2|}}, & k_x^2 \le k^2, \\ \frac{1}{\sqrt{k_x^2 - k^2}}, & k_x^2 > k^2. \end{cases}$$
(16)

$$\angle G_{vp} = \begin{cases} 0, & k_x^2 \le k^2, \\ \frac{\pi}{2}, & k_x^2 > k^2. \end{cases}$$
(17)



Abbildung 3 – Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion G_{vp} zur Umwandlung von Schnelle- in Druckspektrum

Der Betragsgang weißt den typischen Verlauf einer Resonanzkurve auf. Ist der Anstieg im Bereich $k_x \ll k$ noch realtiv flach, so wird er mit zunehmender Ortswellenzahl jedoch immer steiler bis er schließlich beim Erreichen der Schwingwellenzahl k in einer Resonanzüberhöhung gipfelt. Verantwortlich für diese Überhöhung ist ein Wurzelpol in der Betragsfunktion an der Stelle $k_x = k$, der lokal zu einer unendlich starken Ausprägung der Betragskurve führt. Für $k_x > k$ folgt ein steiler Abfall der Kurve, die schließlich für sehr große Ortswellenzahlen $k_x \gg k$ gegen Null geht. Mit dem Wurzelpol gehen Singularitäten an den Stellen $k_x = \pm k$ einher, wodurch das uneigentliche Integral analytisch nicht ohne physikalisch motivierte Anpassungen geschlossen lösbar ist und somit unverändert die Anwendbarkeit verliert. Zudem kommt hinzu, dass die Schnellevorgabe für den Fall $\nu_{y,0}(k_x = \pm k) \neq 0$ eine Änderung des Schallfeldes in y-Richtung forciert wird, die durch die Lösung für die Ortswellenzahl $k_y(k_x = k) = 0$ gar nicht ausgedrückt werden kann. Dies hat eine Nulldivision zur Folge, durch die sich Wellen mit unendlich großer Amplitude ausbilden, die sich entlang der x-Achse in positive und negative Richtung ausbreiten. Dadurch würde zudem bei endlichen Betrachtungen die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung für das Fernfeld verletzt.

Die Betrachtung des Phasenwinkels führt zu der Erkenntnis dass im Bereich der ebenen Wellen $k_x < k$ Druck und Schnelle in Phase liegen und für die evaneszenten Wellen $k_x > k$ ein Phasendiffferenz von 90° zwischen den Schallfeldgrößen vorliegt.

Zur Vollständigkeit betrachten wir noch Betrag und Phasengang der gesamte Übertragungsfunktion ohne Vorfaktor für die Extrapolation des Wellenspektrums im Fall einer Schnellevorgabe, welche sich aus der Kaskadierung der beiden Übertragungsfunktionen G_{pp} und G_{vp} zusammensetzt.

$$|G_{vp}G_{pp}| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|k^2 - k_x^2|}}, & k_x^2 \le k^2, \\ \frac{e^y}{\sqrt{k_x^2 - k^2}}, & k_x^2 > k^2. \end{cases}$$
(18)

$$\angle G_{vp}G_{pp} = \begin{cases} -\sqrt{|k^2 - k_x^2|}y, & k_x^2 \le k^2, \\ \frac{\pi}{2}, & k_x^2 > k^2. \end{cases}$$
(19)



Abbildung 4 – Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $G_{vp}G_{pp}$ zur Umwandlung von Schnelle- in Druckspektrum mit anschließender Schalldruckausbreitung

1.4 Physikalisch korrekter Ausbreitungsterm in 2D

Aufgrund der äquivalenten Beschreibung einer Multiplikation im Fourierbereich durch eine Faltung im Ortsbereich lassen sich die Randwertaufgaben alternativ auch ohne Umwege direkt im Ortsbereich lösen. Anstelle der Bewertung der Spektren mit einer Übertragungsfunktion tritt demnach eine lineare Faltung der örtlichen Verteilungen mit einem Ausbreitungsterm [Wil99]. Gemäß dem Faltungssatz ist die Gleichwertigkeit der örtlichen und spektralen Beschreibung für eindimensionale Funktionen definiert als

$$\mathcal{F}_x\{f(x) * g(x)\} = \tilde{f}(k_x)\tilde{g}(k_x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) * g(x) = \mathcal{F}_{k_x}^{-1}\{\tilde{f}(k_x)\tilde{g}(k_x)\} \quad (20)$$

Demnach kann die Lösung der Randwertaufgabe zur Berechnung des Schalldrucks bei gegebener Normalschnelle an der Berandung auch durch die Faltung der Schnelle mit einem örtlichen Ausbreitungsterm ausgedrückt werden

$$p(x,y) = \frac{\omega\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_y(k_x,y_0) \frac{e^{-jk_y(k_x)y}}{k_y(k_x)} e^{-jk_x x} dk_x = \omega\rho \mathcal{F}_{k_x}^{-1} \{\nu_y(k_x,y_0)[G_{vp}G_{pp}]\}$$

$$= v_y(x,y_0) * \left[\frac{\omega\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_y(k_x)y}}{k_y(k_x)} e^{-jk_x x} dk_x\right] = v_y(x,y_0) * \omega\rho \mathcal{F}_{k_x}^{-1} \left\{\frac{e^{-jk_y(k_x)y}}{k_y(k_x)}\right\}.$$
(21)

Der örtliche Ausbreitungsterm entspricht also der Rücktransformation der kaskadierten Übertragungsfunktionen zur Überführung des Schnellespektrums in das Wellenspektrum des Schalldrucks G_{vp} und dessen Projektion in eine andere Ebene G_{pp} . Durch das erste Rayleigh-Integral, welches aus dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral hervorgeht, ist bekannt, dass die korrekte Form der Ausbreitungsfunktion der zweidimensionalen Punktquelle G_{2D} entspricht. Diese ist gegeben durch eine Hankelfunktion der zweiten Art und nullter Ordnung. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\omega\rho\mathcal{F}_{k_{x}}^{-1}\left\{\frac{e^{-jk_{y}(k_{x})y}}{k_{y}(k_{x})}\right\} = \frac{\omega\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jk_{y}(k_{x})y}}{k_{y}(k_{x})}e^{-jk_{x}x}\mathrm{d}k_{x} = 2j\omega\rho G_{2D}(x,y) = \frac{\omega\rho}{2}H_{0}^{(2)}(k\sqrt{x^{2}+y^{2}}).$$
(22)

Damit ist auch der Sollverlauf der kaskadierten Übertragungsfunktion im Fourierbereich unter Vernachlässigung des Vorfaktors genau definiert:

$$G_{vp}G_{pp} = \frac{e^{-jk_y(k_x)y}}{k_y(k_x)} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_x\{H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2})\}.$$
(23)

Mit diesem Wissen lassen sich sowohl der örtliche Ausbreitungsterm, als auch dessen Fouriertransformierte in Betrag und Phasenwinkel nach der Fourier- und Rayleigh-Methode in direkten Vergleich miteinander stellen. Die folgende Abbildung liefert eine grafische Gegenüberstellung der beiden Ausbreitungsterme.



Abbildung 5 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs und des örtlichen Verlaufs der 2D Monopolquelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

Wird anstatt der Normalschnelle der Schalldruck in der Bezugsebene vorgegeben, kann auf ähnliche Weise vorgegangen werden um das Problem ohne Umwege im Ortsbereich zu lösen. Die mit der örtlichen Schalldruckverteilung zu faltende Impulsantwort des Systems, das eine Projektion des Schalldrucks in eine andere Ebene bewirkt, lässt sich durch die inverse Fouriertransformation der komplexen Übertragungsfunktion G_{pp} finden. Gemäß dem Faltungssatz gilt

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k_x, y_0) e^{-jk_y(k_x)y} e^{-jk_x x} dk_x = \mathcal{F}_{k_x}^{-1} \{ \psi(k_x, y_0) G_{pp} \},$$

$$= p(x, y_0) * \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_y(k_x)y} e^{-jk_x x} dk_x \right] = v_y(x, y_0) * \mathcal{F}_{k_x}^{-1} \{ e^{-jk_y(k_x)} \}.$$
(24)

Aus dem zweiten Rayleigh-Integral geht hervor, dass der örtliche Ausbreitungsterm der Normalableitung der zweidimensionalen Punktquelle $\frac{\partial G_{2D}}{\partial n}$ senkrecht zur Berandung entspricht. Dadurch ergibt sich für die Impulsantwort folgender Ausdruck

$$\mathcal{F}_{k_{x}}^{-1} \left\{ e^{-jk_{y}(k_{x})y} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_{y}(k_{x})y} e^{-jk_{x}x} \mathrm{d}k_{x} = 2 \frac{\partial G_{2D}(x,y)}{\partial y}$$

$$= \frac{-y}{2\sqrt{x^{2} + y^{2}}} H_{0}^{(2)}(k\sqrt{x^{2} + y^{2}}) = -\frac{1}{2}\cos(\varphi)H_{0}^{(2)}(kr)$$
(25)

Die zugehörige Übertragungsfunktion erhält man wieder durch einfache Rücktransformation in den Fourierbereich:

$$G_{pp} = e^{-jk_y(k_x)y} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_x\left\{\frac{-y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + y^2})\right\}$$
(26)

Damit ist auch der Sollverlauf für eine stabile Formulierung der Übertragungsfunktion für die Schalldruckausbreitung definiert. Diese lässt sich nun wieder mit der vorhandenen Formulierung der Fourier-Methode vergleichen, was in der folgenden Abbildung zu sehen ist.



Abbildung 6 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs und des örtlichen Verlaufs der 2D Dipolquelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

Soll nun auch noch der Sollverlauf der Übertragungsfunktion G_{vp} ermittelt werden, die den problematischen Wurzelpol enthält, so muss der korrespondierende Term durch Quotientenbildung der beiden korrekt formulierten Übertragungsfunktionen für Schalldruckund Normalschnellevorgabe extrahiert werden. Es folgt bei Vernachlässigung des Vorfaktors

$$G_{vp} = \frac{\mathcal{G}_{pp}G_{vp}}{\mathcal{G}_{vp}} = \frac{e^{-jk_y(k_x)y}}{k_y(k_x)e^{-jk_y(k_x)y}} = \frac{\mathcal{F}_x\{H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2})}{\mathcal{F}_x\{\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2})\}} = \frac{\mathcal{F}_x\{G_{2D}(x,y)\}}{\mathcal{F}_x\{\frac{\partial G_{2D}(x,y)}{\partial y}\}}$$
(27)

Es folgt ein Vergleich der Frequenzgänge der Fourier- und Rayleigh-Formulierung des Wurzelterms, wobei die signifikanten Unterschiede rund um den Übergang zwischen ebenen und evaneszenten Wellen deutlich werden.



Abbildung 7 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs und des örtlichen Verlaufs der kritischen Polstelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

1.5 Regularisierung in 2D durch Glättungsfunktionen zur numerischen Integration

1.5.1 Rechteckfunktion

Eine Möglichkeit zur Regularisierung des Wurzelpols ist die Glättung der betroffenen Übertragungsfunktion durch ein analytisches Integral über die kontinuierliche Ortswellenzahlen k_x und einer anschließenden Diskretisierung der geglätteten Übertragungsfunktion, welche nun konsequenterweise keine Singularitäten mehr aufweisen wird. Für diese Glättung können diverse Interpolationsfunktionen herangezogen werden, wobei für die folgenden Betrachtungen erstmals eine simples Rechteckfunktion zum Einsatz kommt. Den Ausgangspunkt stellt die Gleichung zur Bestimmung des Schalldrucks entlang einer beliebig gelegenen Linie in y bei Vorgabe des Drucksgradienten in der Bezigsebene y_0 dar. Nur in dieser Gleichung ist der Wurzelpol vorhanden und verlangt für ihre Lösung nach einer geeigneten Regularisierung. Sie ist gegeben durch

$$p(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial \tilde{p}(k_x, y_0)}{\partial y_0}}_{\tilde{p}_{\partial x}(k_x, y_0)} e^{-j(y-y_0)\sqrt[4]{1-\frac{k_x^2}{k^2}}} \frac{1}{-jk\sqrt[4]{1-\frac{k_x^2}{k^2}}} e^{jk_x x} \mathrm{d}k_x \tag{28}$$

Dabei entspricht \tilde{p} dem transformierten Schalldruck im Wellenzahlraum. Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich zusätzlich als nützlich, eine Substitution des Quotienten der Orts- und Schwingwellenzahl einzuführen.

Substitution:
$$u = \frac{k_x}{k}$$

$$p(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_{\partial_y}(k_x, y_0) e^{-j(y-y_0)\sqrt[k]{1-u^2}} \frac{1}{-jk\sqrt[k]{1-u^2}} e^{jkux} k \mathrm{d}u$$
(29)

Der Ausdruck $\sqrt[n]{}$ kennzeichnet dabei die konjugiert komplexe Funktion für die Wahl des richtigen Vorzeichens für einen positiven Realteil $\Re\{\cdot\} \ge 0$ und einen negativen Imaginärteil $\Im\{\cdot\} \le 0$. Mit Ausnahme der Übertragungsfunktion die den Wurzelpol enthält lassen sich alle Terme problemlos in der Wellenzahldomäne diskretisieren mit $kx = \Delta k_x l = k \Delta u l$. Durch eine anschließende Interpolation der diskreten Werte über kontinuierliche Wellenzahlen k_x erhält man eine Approximation der kontinuierlichen Ausgangsfunktion, ohne dabei einen nennenswerten Informationsverlust zu erfahren. In diesem Fall wird eine um ein halbes Sample versetzte Stufeninterpolation (Sample-and-Hold) eingesetzt, die durch eine Rechteckfunktion realisiert werden kann. Auf diese Weise lässt sich die interpolierte Funktion auch als Summe von verschobenen und mit den entsprechenden diskreten Funktionswerten gewichteten Rechtecksfunktionen anschreiben. Aus der Diskretisierung der polfreien Funktion in $u = \Delta u l$ geht folgender Ausdruck hervor

$$(u)$$

$$A_l = A(\Delta ul) = \tilde{p}_{\partial_u}(k\Delta ul, y_0)e^{-j(y-y_0)}\sqrt[]{1-[\Delta ul]^2}e^{jk\Delta ulx}.$$
(30)

Abbildung 8 – Geometrische Interpretation der Stufeninterpolation als Summe von verschobenen und gewichteten Rechtecksfunktionen

Die anschließende Stufeninterpolation zur Approximation der Ausgangsfunktion führt zur numerischen Integraldiskretisierung

$$A(u) \approx A_{\Box}(u) = \sum_{l} A_{l} \prod_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} (u).$$
(31)

Dabei markiert \Box die Stufeninterpolation durch eine Rechteckfunktion \prod , die zentriert auf den Samples liegt und sich in positive und negative Richtung jeweils über ein halbes

Wellenzahlinkrement Δu ausdehnt. Das ursprüngliche Integral kann nun durch Ersetzen der originalen, polfreien Funktion durch seine interpolierte, numerisch integrierte Version approximiert werden:

$$p(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \frac{1}{-j\sqrt[4]{1-u^2}} du \approx \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Box}(u) \frac{1}{-j\sqrt[4]{1-u^2}} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l} A_{l} \prod_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} (u) \frac{1}{-j\sqrt[4]{1-u^2}} du.$$
(32)

Durch das Vertauschen von Integral und Summe und einer entsprechenden Anpassung der Integralgrenzen lässt sich der Schalldruck als Summe von gewichteten, bestimmten Integralen anschreiben. Dabei ist der Integrand durch den mit der Rechteckfunktion beaufschlagten Wurzelterm gegeben. Die stückweise Integration lässt sich somit als Glättung mittels einer Rechteckfunktion auffassen

$$p(x,y) = \sum_{l} A_{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u}(u)}{-j\sqrt[*]{1-u^{2}}} \mathrm{d}u = \sum_{l} A_{l} \int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{1}{-j\sqrt[*]{1-u^{2}}} \mathrm{d}u.$$
(33)

Zur Auswertung des Schalldrucks fehlt somit nur noch die Bestimmung des Integrals, für welches sich glücklicherweise eine analytische Lösung finden lässt. Hierfür wird das betreffende Integral separiert für alle möglichen Konstellationen der Integralgrenzen ausgewertet um auf eine allgemein gültige Gesamtlösung für komplexwertige Probleme in geschlossener Form schließen zu können

$$\frac{1}{\Delta u} \int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{\mathrm{d}u}{-\mathrm{j}\sqrt[4]{1-u^2}} = \frac{1}{\Delta u} \int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt[4]{u^2-1}}$$

$$\frac{1}{\Delta u} \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt[4]{u^2-1}} = \frac{\mathrm{arcosh}^*(b) - \mathrm{arcosh}^*(a)}{\Delta u}.$$
(34)

Hier kennzeichnet der Stern über der Area-Funktion des Hyperbelcosinus arcosh, dass eine Auswertung bei u < 1 negative Imaginärwerte ergeben soll. Durch Auswertung des Integrals haben wir einen Ausdruck für die geglättete Version des Wurzelterms ermittelt, der anstelle des ursprüglichen Terms in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden kann. Dieser enthält nunmehr keine Singularitäten, da arcosh über die betrachteten Wellenzahlen nicht singulär wird, sondern bloß bei 1 von reell nach imaginär übergeht. Die Polstelle des ursprünglichen Wurzelterms kann somit auf diese Weise erfolgreich regularisiert werden. Nur wenn die Diskretisierungsperiode $\Delta u \rightarrow 0$ infinitesimal klein wird, entsprechen die regularisierten Terme in den ersten beiden Fällen den Differentialen, die wieder zu der ursprünglichen Formulierung des Wurzelterms führen würden. Dadurch bestätigt sich wiederum ihre Berechtigung zur Regularisierung der originalen Übertragungsfunktion. Solange in der Wellenzahldomäne also nicht zu fein diskretisiert wird ist eine erfolgreiche Regularisierung der Polstelle möglich, unabhängig davon wo die diskreten Wellenzahlen und die damit verbundenen Integralgrenzen auch liegen mögen.

Durch dieses neu erlangte Wissen lässt sich nun die modifizierte Gleichung zur Bestimmung des Schalldrucks als IDFT mit der Diskretisierung $e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$ in k_x wie folgt anschreiben:

$$u \to \Delta ul, \qquad k_x = ku \to \Delta k_x l = k\Delta ul, \qquad x \to \Delta xm$$
$$e^{jk_x x} \to e^{jk\Delta ul\Delta xm} = e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$$
$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{N\Delta x} = \frac{2\pi}{L_x}, \qquad \Delta u = \frac{\Delta k_x}{k} = \frac{2\pi}{kN\Delta x} = \frac{2\pi}{kL_x},$$
(35)

$$p_{m}(y) = \sum_{l} \tilde{p}_{\partial_{y}} \left(\frac{2\pi}{L_{x}}l, y_{0}\right) e^{-j(y-y_{0})\sqrt[*]{k^{2} - [\frac{2\pi}{L_{x}}l]^{2}}} \left[\int_{\frac{2\pi}{kL_{x}}(l-\frac{1}{2})}^{\frac{2\pi}{kL_{x}}(l+\frac{1}{2})} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt[*]{u^{2} - 1}} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$$

$$= \sum_{l} \tilde{p}_{\partial_{y}} \left(\frac{2\pi}{L_{x}}l, y_{0}\right) e^{-j(y-y_{0})\sqrt[*]{k^{2} - [\frac{2\pi}{L_{x}}l]^{2}}} \left[\frac{\operatorname{arcosh}^{*}[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l+\frac{1}{2})] - \operatorname{arcosh}^{*}[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l-\frac{1}{2})]}{\frac{2\pi}{kL_{x}}} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$$

$$(36)$$

Um die Auswirkung der Regularisierung auf die Polstelle zu verdeutlichen wird der Betrag und Phasenwinkel der modifizierte Übertragungsfunktion in direkten Vergleich zur originalen Übertragungsfunktion dargestellt. Außerdem wird der Sollverlauf der Kurven durch die Übertragungsfunktion der 2D Monopolquelle, wie sie durch das Rayleigh-Integral vorgegeben werden, angegeben und mit den Kurven der regularisierten Übertragunsfunktion abgeglichen. Um Artefakte durch das Gibbs-Phänomen, die bei der Fouriertransformation der endliche begrenzten Monopol- und Dipolquelle im Ortsbereich entstehen, möglichst zu vermeiden, werden die Funktionen vor der Transformation mit einem Hann-Fenster gewichtet. Um den Betrags- und Phasenschwankungen zu umgehen, die durch die Fensterung an der Polstelle hervorgerufen werden können, wird eine zweite, ungefensterte Übertragungsfunktion definiert. Der interessierende Bereich um die Polstelle wird der ungefensterten Funktion entnommen und anstelle des gefensterten Pols zur Anzeige gebracht.

M. Pagavino: Alternative Diskretisierungen der Fourier-Methode

Unterschiedliche Wellenzahlen k:

Abbildung 9 zeigt die verschiedenen Übertragungsfunktionen rund um den kritischen Wurzelpol in Abhängigkeit der Wellenzahl. Um die Gültigkeit der vorgeschlagenen Regularisierung für verschiedene Wellenzahlbereiche zu überprüfen, werden die Übertragungsfunktionen für drei unterschiedliche Schwingwellenzahlen k bei einer gegebenen örtlichen Abtastung von N = 512 Punkten und einem konstant gehaltenen Abstand zur Quelle von y = 3cm definiert. Die untersuchten Schwingwellenzahlen liegen bei $k_1 = \Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{1}{8}, k_2 = \Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{1}{2}$ und $k_3 = \Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{3}{4}$. Wird die Schwingwellenzahl k, wie auch in diesem Fall, direkt auf einem Stützwert des diskreten Spektrums definiert, entstehen unweigerlich Singularitäten in der originalen Übertragungsfunktion der Fourier-Methode welche eine Lücke im angezeigten Frequenzgang hervorrufen würden. Um dem entgegenzuwirken wird die Wellenzahl k durch einen Korrekturterm von +0.001 leicht abseits des Frequenzbins verschoben, wodurch die Singularität abgeschwächt wird und in einer steilen Resonanzkurve resultiert. Wird ein kleinerer Korrekturterm gewählt, kommt es zu einem noch ausgeprägterem Anstieg der Betragskurve an der Polstelle.



Abbildung 9 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlen k

Wie man sieht, verschwindet durch die Regularisierung die Singularität an der Polstelle. Der Sollverlauf des Betrags- und Phasengangs am Übergang zwischen ebenen und evaneszenten Wellen lässt sich durch diese Methode über die untersuchte Bandbereite des Spektrums erfolgreich annähern. Der dabei entstehende Fehler im Betragsgang bleibt meist unter 3dB, die Phasenabweichung am Übergang beträgt $\pm 10^{\circ}$. Die originale Übertragungsfunktion der Fourier-Methode weist hingegen eine Phasenabweichung von $> 20^{\circ}$ und eine Betragsfehler von > 20dB auf, der noch größer wird je näher sich die Schwingwellenzahl k am diskreten Bin der Ortswellenzahl k_x befindet.

Unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl:

Nun soll der Einfluss unterschiedlich feiner Wellenzahldiskretisierung auf die Regularisierung der Polstelle untersucht werden. Hierfür wird die Übertragungsfunktion mit drei verschiedenen Anzahlen an Diskretisierungsschritten N in der Wellenzahl für eine Schwingwellenzahl $k = \Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{1}{2} + 0.001$ und einem Quellabstand von y = 3cm definiert. Abbildung 10 zeigt die Ergebnisse für die gewählten Anzahlen an Diskretisierungsstufen in der Wellenzahl $N_1 = 128$, $N_2 = 256$ und $N_1 = 1024$.



Abbildung 10 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Anzahlen N an Diskretisierungsstufen in der Wellenzahl

Wie man sieht, lässt sich die Polstelle unabhängig von der gewählten Diskretisierungsfeinheit der Wellenzahl erfolgreich regularisieren. Die Größenordnung des Fehlers am Übergang bleibt für die betrachteten Abtaststufen annähernd gleich. Es macht den Anschein, als ob eine kleinere Anzahl an Abtaststufen bei der Fourier-Methode eine stärker ausgeprägte Dämpfung der evaneszenten Wellen oberhalb der Koinzidenzfrequenz hervorrufen. Die Regularisierungsmethode kann als Ursache ausgeschlossen werden, da die Abweichung auch die originale Übertragungsfunktion betrifft. Bei näherer Untersuchung fällt jedoch auf, dass diese Abweichung der Fourier-Terme von der zweidimensionalen Green'schen Funktion am oberen Ende des Wellenzahlspektrums auch bei großer Anzahl an Abtaststufen auftritt. Verschiedene Fenstertypen haben hier einen großen Einfluss auf sowohl die Grenzfrequenz, ab der die relative Abweichung der Dämpfungskurven auftritt, als auch die Ausprägung der Abweichung. Der Einfluss der Fensterung ist in Abbildung 11 illustriert. Die Kurvenabweichung lässt sich somit auf das Abschneiden der örtlich unendlichen Besselfunktion auf einen endlichen Bereich und der anschließenden Periodisierung durch die Fouriertransformation zurückführen.



Abbildung 11 - Einfluss der Fensterung auf den Kurvenverlauf der Green'schen Funktion

Weiters ist zu vermerken, dass bei feiner Diskretisierung immer weniger von der Regularisierung zu erkennen ist. Je größer die Frequenzauflösung gewählt wird, desto mehr nähert sich der regularisierte Wurzelpolterm der originalen Funktion an. Dieser Effekt tritt allerdings erst bei sehr hohen Auflösungen auf, weswegen der Betragsfehler sogar bei dekadische Vielfachen von N = 2048 auch bei großen Wellenzahlen noch unter 3-5dB liegt. Die Regularisierung scheint somit im praktischen Einsatz weitestgehend unabhängig von der gewählten Diskretisierungsperiode erfolgreich einsetzbar zu sein.

Unterschiedliche Quellabstände y:

Abbildung 12 zeigt den Einfluss unterschiedlicher Abstände y zwischen Quelle und Beobachtungspunkt auf die Übertragungsfunktionen. Für die Diskretisierung wurde eine Anzahl von N = 512 Wellenzahlpunkten gewählt und Schwingwellenzahl wurde wieder mit $k = \Delta k_x \cdot \left(\frac{N}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 0.001$ festgelegt. Die untersuchten Quellabstände betragen $y_1 = 3$ cm, $y_2 = 6$ cm und $y_1 = 10$ cm.



Abbildung 12 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Quellabstände y

Mit zunehmendem Abstand zur Quelle erfahren die evaneszenten Wellenanteile oberhalb der Koinzidenzfrequenz eine immer stärker werdende Dämpfung. Sie sind nicht ausbreitungsfähig und klingen exponentiell mit dem Abstand ab. Die Abstandsänderung bewirkt natürlich auch eine Phasenverschiebung der Wellenanteile, welche sich auch in den BodeDiagrammen widerspiegelt. Da der Funktionsterm mit dem kritischen Wurzelpol keine Abhängigkeit vom Quellabstand *y* aufweist, zeigt die Variierung des Abstands auch keinerlei wahrnehmbaren Effekt auf die Regularisierung der Polstelle. Die leichte Überhöhung der Betragskurve bei größeren Abständen hat demnach die Übertragungsfunktion für die Schalldruckausbreitung zu verschulden und ist bei alleiniger Betrachtung der Polfunktion nicht mehr vorhanden.

Unterschiedliche Schwingwellenzahlen:

Schlussendlich soll die Auswirkung der relativen Lage der Schwingwellenzahl k zu einer Stützstelle des diskreten Wellenzahlspektrums untersucht werden. Hierfür wird die Wellenzahl mit einem Versatz von jeweils $+\frac{\Delta k_x}{8}$, $+\frac{\Delta k_x}{4}$ und $+\frac{\Delta k_x}{2}$ abseits des Frequenzbins $\Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{1}{4}$ positioniert. Die Evaluierung der Übertragungsfunktionen erfolgt mit einer Anzahl von N = 512 Punkten in einem Quellabstand von y = 3cm.



Abbildung 13 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Schwingwellenzahlen

Liegt die Wellenzahl k in unmittelbarer Nähe einer diskreten Wellenzahl $(k + \frac{\Delta k_x}{8})$, bleibt der Verlauf der regularisierten Übertragungsfunktion weitestgehend unverändert. Die Resonanzüberhöhung der originalen Funktion ist weniger stark ausgeprägt, bleibt jedoch immer noch klar erkennbar, wie auch die deutliche Phasenabweichung an der Polstelle. Erhöht man den Abstand zwischen Schwingwellenzahl und diskreter Wellenzahl $(k + \frac{\Delta k_x}{4})$ wird der Betragsverlauf der originalen und regularisierten Übertragungsfunktion annähernd deckungsgleich. Die Phasenabweichung der Originalfunktion bleibt jedoch nach wie vor erhalten, während die regularisierte Phase weiterhin dem Sollverlauf der Green'schen Funktion folgt. Der Extremfall ist erreicht, wenn die Schwingwellenzahl exakt zwischen zwei Stützstellen liegt $(k + \frac{\Delta k_x}{2})$. In diesem Fall tritt eine deutliche Betragsunterschreitung der Sollkurve durch die originale Übertragungsfunktion auf. Die Regularisierung erzwingt zwar den gewünschten Betragsverlauf, der Phasenverlauf gleicht jedoch dem der originalen Übertragungsfunktion und weicht an der Polstelle ebenfalls stark vom Sollwert ab.

Um eine Verbesserung der Approximation zu erreichen, können alternative Interpolationsfunktionen in Betracht gezogen werden, welche eine akkuratere Glättung der Polstelle ermöglichen.

1.5.2 Dreiecksfunktion

Nun soll eine Dreiecksfunktion für die Glättung und damit Regularisierung des Wurzelpols verwendet werden. Die Vorgehensweise bleibt dabei in den Grundzügen weitestgehend gleich. Sämtliche Substitutionen und Diskretisierungen können somit bedenkenlos übernommen werden. Den Ausgangspunkt stellt erneut die Gleichung zur Bestimmung des Schalldrucks bei Randwertvorgabe des Druckgradient dar, da nur hier die Übertragungsfunktion mit der Problemstelle auftritt. Dieser ausgenommen lassen sich wieder alle Terme in der Wellenzahldomäne diskretisieren und anschließend wieder über kontinuierliche Wellenzahlen interpolieren. Diesmal kommt allerdings ein Dreiecksfunktion als Alternative zur Rechteckfunktion des vorangegangen Beispiels zum Einsatz. Die interpolierte Funktion lässt sich dann als Summe von äquidistant verschobenen und mit den diskreten Funktionswerten gewichteten Dreieckfunktionen anschreiben. Diese erstrecken sich über die doppelte Samplingperiode $2\Delta u$, sodass sich benachbarte Dreiecke überlappen, was in einer linearen Interpolation resultiert. Demnach wird durch die Wahl dieser Interpolationsfunktion eine bessere Approximation der Ursprungsfunktion erreicht.

$$A(u) \approx A_{\Delta}(u) = \sum_{l} A_{l} \bigwedge_{(l-1)\Delta u}^{(l+1)\Delta u} (u).$$
(37)

Dabei markiert \triangle die Linearinterpolation durch die Dreiecksfunktion \bigwedge , der zentriert auf den Samples liegt und sich in positive und negative Richtung jeweils über eine ganze Samplingperiode ausdehnt. Die Dreiecksfunktion setzt sich aus zwei verschobenen, lokal begrenzten Einheitsrampen zusammen, welche die gleiche Steigung jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen aufweisen. Dadurch ergibt sich folgender Ausdruck für die Dreiecksfunktion in u:

$$\bigwedge_{(l-1)\Delta u}^{(l+1)\Delta u} (u) = 1 - \left| \frac{u - l\Delta u}{\Delta u} \right| = \begin{cases} (1-l) + \frac{u}{\Delta u} & (l+1)\Delta u < u \le l\Delta u \\ (1+l) - \frac{u}{\Delta u} & l\Delta u < u \ge (l+1)\Delta u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(38)



Abbildung 14 – Geometrische Interpretation der Linearinterpolation als Summe von verschobenen und gewichteten Dreiecksfunktionen

Das Integral zur Bestimmung des Schalldrucks kann nun erneut durch Ersetzen der originalen, polfreien Funktion durch seine interpolierte Version angenähert werden:

$$p(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \frac{1}{-j\sqrt[n]{1-u^2}} du \approx \int_{-\infty}^{\infty} A_{\Delta}(u) \frac{1}{-j\sqrt[n]{1-u^2}} du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l} A_{l} \bigwedge_{(l-1)\Delta u}^{(l+1)\Delta u} (u) \frac{1}{-j\sqrt[n]{1-u^2}} du = \sum_{l} A_{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bigwedge_{(l-1)\Delta u}^{(l-1)\Delta u}}{-j\sqrt[n]{1-u^2}} du \qquad (39)$$
$$= \sum_{l} A_{l} \int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{1-\left|\frac{u-l\Delta u}{\Delta u}\right|}{-j\sqrt[n]{1-u^2}} du$$

Der Schalldruck lässt sich somit wieder als eine gewichtete Summe von analytischen Teilintegralen darstellen, die als abschnittsweise durchgeführte Dreiecksglättung des problematischen Wurzelterms interpretiert werden können. Diese lassen sich wiederum in zwei Teilintegrale aufspalten, die jeweils die ansteigende und abfallende Rampe der Dreiecksfunktion beinhalten. Werden die konstanten und linearen Terme der Rampenfunktionen getrennt integriert, so lassen sich für beide Fälle analytische Lösungen finden. Für die Aufspaltung des Integrals gilt somit

$$\int_{(l-1)\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{1 - \left|\frac{u - l\Delta u}{\Delta u}\right|}{-j\sqrt[4]{1 - u^2}} du = \int_{(l-1)\Delta u}^{l\Delta u} \frac{(1 - l) + \frac{u}{\Delta u}}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du + \int_{l\Delta u}^{(l+1)\Delta u} \frac{(1 + l) - \frac{u}{\Delta u}}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du = \int_{l\Delta u}^{l\Delta u} \frac{(1 - l)}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du + \frac{1}{\Delta u} \int_{(l-1)\Delta u}^{l\Delta u} \frac{u}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du + \int_{l\Delta u}^{(l+1)\Delta u} \frac{(1 + l)}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du - \frac{1}{\Delta u} \int_{l\Delta u}^{(l+1)\Delta u} \frac{u}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du = \frac{(40)}{(40)}$$

Die Lösung der Integrale mit konstantem Zählerterm entspricht dem bereits bekannten Ausdruck für die Glättung des Wurzelterms mittels Rechteck inklusive einer zusätzlicher Gewichtung. Die Integrale mit linearem Zählerterm können über die folgenden Identitäten gelöst werden, wobei der Stern über den Wurzelausdrücken kennzeichnet, dass die Auswertung bei u < 1 negative Imaginärwerte ergeben soll:

$$\frac{1}{\Delta u} \int_{a}^{b} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt[s]{b^2 - 1} - \sqrt[s]{a^2 - 1}}{\Delta u}.$$
(41)

Damit kann die Gesamtlösung für die Summe der Teilintegrale wie folgt bestimmt werden:

$$\int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{1 - \left|\frac{u-l\Delta u}{\Delta u}\right|}{\sqrt[4]{u^2 - 1}} du =$$

$$-2l \operatorname{arcosh}^*[\Delta ul] + (1+l)\operatorname{arcosh}^*[\Delta u(l+1)] - (1-l)\operatorname{arcosh}^*[\Delta u(l-1)]$$

$$+ \frac{1}{\Delta u} \left[2\sqrt[4]{[\Delta ul]^2 - 1} - \sqrt[4]{[\Delta u(l+1)]^2 - 1} - \sqrt[4]{[\Delta u(l-1)]^2 - 1}\right]$$
(42)

Dieser Ausdruck entspricht der geglätteten Übertragungsfunktion zur Umrechnung des Druckgradienten in den Schalldruck, die in dieser Form keine Singularitäten mehr aufweist. Folglich eignet sich auch die Dreiecksfunktion hervorragend zur Regularisierung des problematischen Wurzelpols der originalen Übertragungsfunktion. Wird die selbe Diskretisierung der IDFT wie im vorangegangenen Beispiel gewählt, so kann die Gleichung zur Auswertung des Schalldrucks entlang einer Linie in y mit der regularisierten Version der Übertragungsfunktion wie folgt angeschrieben werden:

$$p_{m}(y) = \sum_{l} \tilde{p}_{\partial y} \left(\frac{2\pi}{L_{x}}l, y_{0}\right) e^{-j(y-y_{0})\sqrt[8]{k^{2} - [\frac{2\pi}{L_{x}}l]^{2}}} \left[\int_{(l-\frac{1}{2})\Delta u}^{(l+\frac{1}{2})\Delta u} \frac{1 - \left|\frac{u-l\Delta u}{\Delta u}\right|}{\sqrt[8]{u^{2} - 1}} du \right] e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$$

$$= \sum_{l} \tilde{p}_{\partial y} \left(\frac{2\pi}{L_{x}}l, y_{0}\right) e^{-j(y-y_{0})\sqrt[8]{k^{2} - [\frac{2\pi}{L_{x}}l]^{2}}}$$

$$- 2l \operatorname{arcosh}^{*} \left[\frac{2\pi}{kL_{x}}l\right] + (1+l)\operatorname{arcosh}^{*} \left[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l+1)\right] - (1-l)\operatorname{arcosh}^{*} \left[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l-1)\right]$$

$$+ \frac{1}{\frac{2\pi}{kL_{x}}} \left[2\sqrt[8]{[\frac{2\pi}{kL_{x}}l]^{2} - 1} - \sqrt[8]{[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l+1)]^{2} - 1} - \sqrt[8]{[\frac{2\pi}{kL_{x}}(l-1)]^{2} - 1}\right] e^{j\frac{2\pi}{N}lm}$$

$$(43)$$

Auch hier lässt sich der Einfluss der Regularisierung des Wurzelpols auf den Verlauf der Übertragungsfunktion am besten grafisch veranschaulichen. Der durch das Rayleigh-Integral vorgegebene Sollkurvenverlauf von Betrag und Phase lässt sich durch die Dreiecksfunktion noch eine Spur besser approximieren, wodurch es im direkten Vergleich zur Rechtecksfunktion zur ersten Wahl avanciert. Allerdings sind die Unterschiede um die Polstelle zwischen den beiden Methoden nicht von grundlegender Bedeutsamkeit. Für die folgenden Abbildungen der Übertragungsfunktionen wurden die Parametereinstellungen für Abtaststufen N im Wellenzahlbereich, Quellabstand y und Schwingwellenzahl k aus den vorangegangenen Beispielen für die Rechtecksfunktion übernommen.



Unterschiedliche Wellenzahlen k:

Abbildung 15 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlen k

Unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl:



Abbildung 16 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl

Unterschiedliche Quellabstände y:



Abbildung 17 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Quellabstände y



Unterschiedliche Schwingwellenzahlen:

Abbildung 18 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Schwingwellenzahlen

1.6 Schallfeldauswertung in 2D

Um auch die Auswirkung der Regularisierung auf das Schallfeld ebener Strahler zu untersuchen, wird durch die Vorgabe einer Normalschnelle entlang der x-Achse bei y = 0eine einfache Randwertaufgabe in 2D formuliert und mit der originalen und den regularisierten Fourier-Methoden, sowie dem Rayleigh-Integral für den oberen Halbraum y>0 gelöst. Als Quelle wird ein schwingender Rechteckspalt mit einer Länge von L = 0.5mverwendet, welcher zentriert in der Bezugslinie $(-1m < x < 1m, y_0 = 0)$ positioniert wird. Das abgestrahlte Wellenfeld wird bis zu einem Abstand von y = 2m oberhalb der Quelle betrachtet. Die erzwungene Rechteckschwingung ist

$$v(x,y_0) = u\left(x + \frac{L}{2}\right) - u\left(x - \frac{L}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_y(k_x) e^{-jk_x x} \mathrm{d}k_x \tag{44}$$

Das zugehörige Wellenspektrum lässt sich analytisch bestimmen mit

$$\nu_y(k_x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-jk_x x} \mathrm{d}k_x = L \frac{\sin\left(\frac{L}{2}k_x\right)}{\frac{L}{2}k_x}$$
(45)



Abbildung 19 – Wellenfeld eines schwingenden Rechteckspaltes gemäß Rayleigh-Integral (oben-links), der originale Fourier-Methode (oben-rechts), der Rechtecks-Regularisierung (unten-links) und der Dreiecks-Regularisierung (unten-rechts)

Die Ortsfunktion wird für die optimale Darstellung des Schallfelds so fein diskretisiert, dass sich auch bei der Auswertung mittels Rayleigh-Integral noch angemessene Rechenzeiten ergeben. Um die Problematik der kritischen Wurzelpolstelle zu verdeutlichen, wird die Schwingfrequenz des Rechtecks so festgelegt, dass die Schwingwellenzahl k fast exakt mit einem Stützwert des diskreten Wellenzahlspektrums zusammenfällt. Die resultierende Schwingfrequenz des Rechteckspaltes entspricht $f \approx 685Hz$. Dadurch kommt es bei Verwendung der unregularisierten Fourier-Methode an der Stelle $k_x = k$ bei der Umrechnung des Schnellespektrums in ein Druckspektrum mit $\psi(k_x) = \frac{\rho\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \nu_y(k_x)$ sofern $\nu_y(k) \neq 0$ zu einer Unendlichkeitsstelle $\psi(k) = \frac{\rho\omega}{0} \nu_y(k_x) = \infty$ und somit zu einem unphysikalischen Ergebnis. Da die Wellenausbreitung an der Koinzidenzfrequenz parallel zur Quellebene verläuft, entsteht somit eine in x-Richtung hin- und zurücklaufende Ortswellenkomponente mit unendlicher Amplitude. Werden die vorgeschlagenen alternativen Diskretisierungen der Fourier-Methode für die Auswertung des Schallfeldes verwendet, wird diese Singularität erfolgreich vermieden und die Wellenausbreitung erfolgt näherungsweise physikalisch korrekt.

Die deutlich erkennbaren Amplitudenschwankungen der Wellenbäuche der auslaufenden Welle ist auf die Periodisierung der Schallquelle im Ortsbereich zurückzuführen, die mit der Verwendung der diskreten Fouriertransformation unweigerlich einhergeht. Durch die Diskretisierung muss das unendlichen Integral der Fouriertransformation auf ein endliches Fenster beschränkt werden, welches außerhalb seines Definitionsintervalls periodisch fortgesetzt wird. Das aus der diskreten Fourier-Methode hervorgehende Schallfeld entspricht somit nicht nur dem Schallfeld der originalen Quelle, sondern der Überlagerung der Schallfelder einer unendliche Anzahl an Schallquellen der gleicher Art, welche periodisch entlang der Bezugslinie angeordnet sind. Dadurch kommt es zu konstruktiven und destruktiven Interferenzen der Schallwellen im betrachteten Ortsfenster und somit zu den ungewünschten Welligkeitsartefakten. Um diesen Effekt zu verdeutlichen wird die inhärente Periodisierung der DFT durch eine lokale Vervielfachung der Schallquelle unter Verwendung des Rayleigh-Integrals simuliert. Der negative Einfluss der unmittelbar benachbarten Quellen auf das abgestrahlte Schallfeld der originalen Quelle ist dabei deutlich zu erkennen. Das resultierende Schallfeld im interessierenden Ortsfenster gleicht jedem Schallfeld, welches mit Hilfe der regularisierten Fourier-Methode bestimmt wurde.

Rayleigh - Simulation of Spatial Periodization



Abbildung 20 – Simulation der örtlichen Periodisierung der Schallquelle mittels Rayleigh-Integral

Um den negativen Einfluss der periodisch fortgesetzten Schallquellen zu minimieren, müssen diese in einem möglichst großen Abstand zur Quelle positioniert werden. Da der schwingende Rechteckspalt bei der betrachteten Frequenz eine relativ geringe seitliche Schallabstrahlung aufweist, lässt sich der Fehler im Nahfeld der Quelle zunehmend verringern, je weiter man die Spiegelquellen von der Originalquelle distanziert. Bei der Fourier-Methode lässt sich dies durch eine beidseitige Verlängerung der quellenfreien Bereiche der Ortsfunktion durch das Hinzufügen von Nullen (Zero-Padding) vor der Transformation realisieren. Der Einfluss von Zero-Padding auf das resultierende Wellenfeld wird erneut durch eine lokal begrenzte Periodisierung der Schallquelle, diesmal jedoch mit zusätzlich angehängten Nullen, mit Hilfe des Rayleigh-Integrals simuliert.



Rayleigh - Simulation of Spatial Periodization with Zero Padding

Abbildung 21 – Simulation der örtlichen Periodisierung der Schallquelle mittels Rayleigh-Integral inklusive beidseitigem Zero-Padding

Wie man sieht lassen sich auf diese Weiße die störenden Interferenzen deutlich minimieren und somit Qualität der Darstellung erheblich verbessern. Werden die regularisierten Fourier-Methoden mit zusätzlichem Zero-Padding zur Auswertung des Schallfeldes verwendet, liefern diese, abgesehen von einer minimalen verbleibenden Restwelligkeit, eine stabile, physikalisch korrekte Lösung der Randwertvorgabe.



Abbildung 22 – Wellenfeld eines schwingenden Rechteckspaltes gemäß Rechtecks-Regularisierung (links) und Dreiecks-Regularisierung (rechts) mit Zero-Padding

2 Abstrahlungsproblem in 3D

Der Beginn des Abschnitts wiederholt im wesentlichen die Formulierungen, die bereits für 2D bekannt sind, allerdings mit den nötigen Erweiterungen für das Schallfeld in 3D. Unterschiede ergeben sich vor allem in der Auswertung der Regularisierung, die nun über zweidimensionale Teilintegrale für die numerische Integration erfolgt, mit Interpolationsfunktionen, die trapezförmig approximiert werden.

2.1 Helmholtzgleichung in 3D

Das Konzept der Schallfeldbeschreibung durch Überlagerung von ebenen Wellen kann auch problemlos in drei Dimensionen aufgegriffen werden. Für eine mögliche Lösung der homogenen Helmholtzgleichung wird somit erneut ein Produktansatz mit nunmehr drei Exponentialtermen für die drei Dimensionen gewählt, welcher eine ebene Welle beschreibt, die sich in eine beliebige Raumrichtung ausbreitet.

$$p_h(\mathbf{r}) = e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} = e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{r}}.$$
(46)

Die Ortswellenzahlen, gegeben durch die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$, bestimmen dabei jeweils das Ausbreitungsverhalten der zugrundeliegenden ebenen Elementarwelle entlang der zugehörige Richtungskomponente des Ortsvektors $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$. Auch eine Linearkombination mehrerer solcher ebenen Wellen aus verschiedenen Richtungen würde eine mögliche, allgemeinere Lösung beschreiben. Verwendet man einen dieser Ansätze zum Lösen der Helmholtzgleichung, ergibt sich die folgende charakteristische Gleichung für drei Dimensionen:

$$\mathbf{k}^T \mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad \to \quad ||\mathbf{k}|| = k.$$
 (47)

Eine einzelne ebene Welle beliebiger Orientierung, die eine gültige Lösung der Helmholtzgleichung beschreibt, lässt sich somit in kompakter Notation anschreiben als:

$$p_h(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}^T\mathbf{r}}\delta(||\mathbf{k}|| - k).$$
(48)

Zur Realisierung ebener Wellen, die in bestimmte Raumrichtungen laufen, müssen sich die zugrundeliegenden Elementarwellen durch die Exponentialfunktionen entlang ihrer jeweilige Achsenrichtung und entsprechend ihrer vorgegebenen Ortswellenzahlen ausbreiten. Diese können aber nicht unabhängig voneinander festgelegt werden sondern sind in einem bestimmten Zusammenhang mit der Schwingwellenzahl k der Schallwelle zu wählen. Örtliche und zeitliche Komponenten sind somit streng miteinander gekoppelt. Werden die Ortswellenzahlen k_x und k_y als unabhängige Variablen gewählt, resultiert durch die charakteristische Gleichung folgende Abhängigkeit für k_z :

$$k_{z}(k_{x},k_{y}) = \sqrt{k^{2} - k_{x}^{2} - k_{y}^{2}} = \begin{cases} \sqrt{|k^{2} - k_{x}^{2} - k_{y}^{2}|} \in \mathbb{R}_{0}^{+}, & (k_{x}^{2} + k_{x}^{2}) \le k^{2} \\ -j\sqrt{|k^{2} - k_{x}^{2} - k_{y}^{2}|} \in \mathbb{I}^{-}, & (k_{x}^{2} + k_{x}^{2}) > k^{2} \end{cases}$$

$$(49)$$

Werden nun k_x und k_y durch die Vorgabe der örtlichen Verteilung einer beliebigen Schallfeldgröße realisiert und ist die Schwingwellenzahl k ebenfalls gegeben, so ist durch die charakteristische Zwangskopplung der Parameter auch die Ortswellenzahl k_z festgelegt, und mit ihr auch der Verlauf der Elementarwelle in z-Richtung. Nimmt k_z reelle Werte an, so ist die zugehörige Exponentialfunktion komplexwertig und beschreibt somit eine ebene Welle, die sich in z-Richtung fortpflanzt. Wird k_z jedoch imaginär, so wird der Exponent negativ reellwertig. In diesem Fall beschreibt die Exponentialfunktion keine Welle mehr, sondern lediglich einen exponentiellen Dämpfungsterm in z-Richtung, mit dessen Hilfe sich die evaneszenten Nahfelder darstellen lassen. Um diesen Zusammenhang noch einmal zu verdeutlichen wird im Folgenden genauer auf die Definition des Wellenzahlraumes in drei Dimensionen eingegangen.

Werden die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ auf reelle Werte beschränkt, so liegt dieser auf der durch die charakteristische Gleichung (47) aufgespannten Kugel mit dem Radius k. Durch die Einführung eines sphärischen Koordinatensystems lässt sich der Wellenvektor k auch als Richtungsvektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit Azimutwinkel φ und Zenitwinkel ϑ auf der mit k skalierten Einheitskugel \mathbb{S}^2 anschreiben. Demnach gilt

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = k\boldsymbol{\theta} = k \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$
(50)

In diesem Fall bewegen sich die unabhängigen Ortswellenzahlen k_x und k_y nur innerhalb des Kreises, der durch die Schnittfläche zwischen der Kugel und ihrer Definitionsebene gebildet wird, während die abhängige Ortswellenzahl k_z dabei immer reellwertig bleibt. Der Kreis wird auch als *propagation-circle* oder Kreis der Ausbreitung bezeichnet, da die darin liegenden Komponenten Elementarwellen beschreiben, aus denen ebene Schallwellen resultieren, die sich in das Fernfeld ausbreiten können. Unter solchen Fernfeldbedingungen lässt sich ein Schallfeld, dass aus einer Vielzahl solcher ebenen Wellen aus allen Raumrichtungen zusammensetzt ist, als sphärisches Integral der Wellen mit ihren unterschiedlichen Amplituden und Phasen über alle Raumwinkel schreiben:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{k}) e^{-jk\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{k}) e^{-jk\boldsymbol{\theta}(\varphi,\vartheta)^T \mathbf{r}} \mathrm{d}\varphi \sin(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta.$$
(51)

Ausbreitungsfähige Wellen genügen jedoch oftmals nicht zur vollständigen Beschreibung eines Schallfeldes. Darum ist es nötig den Definitionsbereich des Wellenzahlraumes um imaginäre Ortswellenzahlen zu erweitern. Der Wellenvektor $\mathbf{k} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C}^3$ kann nun auch

komplexwertige Einträge annehmen, liegt jedoch weiterhin auf der Kugel und erfüllt somit die charakteristische Gleichung. So kann es zum Beispiel vorkommen dass die Ortswellenzahlen k_x oder k_y Werte größer als die Schwingwellenzahl k annehmen und damit außerhalb des Kreises der Ausbreitung liegen. Die Ortswellenzahl k_z wird dabei imaginär und beschreibt keine in z-Richtung ausbreitende Elementarwelle, sondern eine exponentielle Dämpfung der Schallwelle normal zu ihrer Ausbreitungsrichtung. Diese Welle ist in z-Richtung nicht ausbreitungsfähig und hat damit evaneszenten Charakter. Der Bereich außerhalb des Kreises markiert somit den Bereich der reinen Nahfeldlösungen. Für den Fall $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k$ liegt der Wellenvektor k direkt am Kreisumfang zwischen den Bereichen der ebenen und evaneszenten Wellen. An dieser Stelle kommt es zur Koinzidenz, order auch Spuranpassung, wobei die vorgegebene örtliche Welle und die resultierende Luftschallwelle die gleiche Wellenlänge aufweisen und parallel nebeneinander herlaufen.

Ein dreidimensionales Schallfeld lässt sich somit als Superposition aller ebenen und evaneszenten Wellen angeben, die als zulässige Lösungen der Helmholtzgleichung gelten. Dies entspricht dem Integral gewichteter Elementarwellen über komplexwertige Wellenzahlen, welche die charakteristische Gleichung erfüllen.

$$p(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathbb{C}^3} \psi(\mathbf{k}) \delta(||\mathbf{k}|| - k) e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k} = \iiint_{\forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3: ||\mathbf{k}|| = k} \psi(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{k}$$
(52)

Betrachtet man den Raum als eine kontinuierliche Aneinanderreihung von planaren 2D-Ebenen, die normal auf die z-Achse liegen, und behandelt man jede dieser Ebenen separat, so kann die allgemeine Formulierung des Schallfeldes in drei Dimensionen auf ein zweidimensionales Problem abgestuft werden. Durch die Interdependenz der Ortswellenzahlen ist bei gegebenem k_x und k_y in der Bezugsebene das Ausbreitungsverhalten der Elementarwelle in z-Richtung vollständig durch k_z charakterisiert. Dadurch lässt sich das planare Wellenzahlspektrum einer Ebene durch die Bewertung mit einem simplen exponentiellen Ausbreitungsterm an beliebige Positionen in z-Richtung verschieben. Dieser Eigenschaft machen wir uns bei den folgenden Randwertaufgaben erneut zu nutze.

2.2 Randwertaufgabe

2.2.1 Schalldruckvorgabe

Wird eine örtliche Schalldruckverteilung in der xy-Ebene bei $z_0 = 0$ vorgegeben (Dirichlet-Randbedingungen) und soll der resultierende Schalldruck entlang der Ebenen im positiven Halbraum $z > z_0$ bestimmt werden, so lässt sich das Problem durch eine einfache Filterung im Fourierbereich lösen. Dafür wird der örtliche Schalldruck entlang der Bezugsebene in das Wellenspektrum überführt und anschließend durch die Bewertung mit einer zweidimensionalen Übertragungsfunktion an eine beliebige Ebene in z projeziert. Die gesuchte örtliche Verteilung des Schalldrucks in dieser Ebene lässt sich dann durch die inverse Fouriertransformation des projezierten Wellenspektrums ermitteln. Durch den Umweg über den Fourierbereich tritt an die Stelle der Lösung einer Differentialgleichung somit eine Multiplikation mit einer Übertragungsfunktion, was einer deutlichen Simplifikation des Lösungsweges entspricht. Die Lösung des Randwertproblems bei Vorgabe des Schalldrucks unterliegt demnach dem folgenden Schema:

$$\psi_0(k_x, k_y, z_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y, z_0) e^{jk_x x} e^{jk_y y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \mathcal{F}_{xy}\{p_0(x, y, z_0)\}$$
(53)

$$\psi(k_x, k_y, z) = \psi_0(k_x, k_y, z_0)e^{-jk_z(k_x, k_y)} = \psi_0(k_x, k_y, z_0)e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$
(54)

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y = \mathcal{F}_{k_x k_y}^{-1} \{ \psi(k_x, k_y, z) \}.$$
 (55)

Dieser Ansatz lässt sich zur folgenden Grundgleichung für die Auswertung des Schalldrucks in einer xy-Ebene in z = const. zusammenfassen:

$$p(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(k_x,k_y,z_0) e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$
(56)

Die komplexe Übertragungsfunktion G_{pp} , durch deren Bewertung das Wellenspektrum in der Bezugsebene in eine beliebig weit entfernte, parallel zu z_0 verschobene Ebene transferiert werden kann, nimmt für das dreidimensionale Problem also folgende Form an:

$$G_{pp} = |G_{pp}|e^{j\angle G_{pp}} = \frac{\psi(k_x, k_y, z)}{\psi_0(k_x, k_y, z_0)} = e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}.$$
(57)

Diese weist eine Abhängigkeit von der Distanz zur Bezugsebene, der Schwingwellenzahl k und der Ortswellenzahlen k_x und k_y auf. Sie kann erneut durch ihren Betrag und Phasenwinkel ausgedrückt werden, welche in diesem Fall jedoch durch zweidimensionale Funktionen gekennzeichnet sind, deren jeweiliger Verlauf in den folgenden Abbildungen dargestellt wird

$$|G_{pp}| = \begin{cases} 1, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \le k, \\ e^{-(z-z_0)\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}}, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k, \end{cases}$$
(58)

$$\angle G_{pp} = \begin{cases} -(z - z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \le k, \\ 0, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k. \end{cases}$$
(59)



Abbildung 23 – Betrag und Phase der zweidimensionalen Übertragungsfunktion G_{pp} zur Schalldruckausbreitung

Werden Betrag und Phasengang als Funktion der planaren Ortswellenzahl $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ dargestellt, so ergeben sich dieselben Kurvenverläufe und Abhängigkeiten wie für den zweidimensionalen Fall. Während der Betragsgang den Verlauf eines Tiefpassfilters aufweist, besitzt der Phasenverlauf eine Hochpasscharakteristik. Die Schwingwellenzahl k stellt in beiden Fällen die Grenzfrequenz dar.

2.2.2 Druckgradient-/Schnellevorgabe

Wird anstelle des Schalldrucks dessen Normalgradient oder die Nomalkomponente der Schnelle in der Bezugsebene vorgegeben (Neumann-Randbedingungen), so kann für die Ermittlung derselben Schallfeldgröße in einer um *z* verschobenen Ebene nach dem selben Prinzip wie bei der Schalldruckvorgabe vorgegangen werden. Das Problem reduziert sich auf eine simple Projektion der zugehörigen Spektralverteilung in die gesuchte Ebene durch deren Gewichtung mit einer komplexen Übertragungsfunktion. Eine anschließende Rücktransformation liefert dann die örtliche Verteilung. Für Druckgradienten und Normalschnelle gilt somit:

$$p_{\partial z_0}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_{\partial z_0}(k_x, k_y, z_0) e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y, \quad (60)$$

$$v_z(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nu_z(k_x,k_y,z_0) e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$
(61)

Ist man jedoch an der örtlichen Schalldruckverteilung im oberen Halbraum interessiert, so muss man sich zunächst von Schnelle zu Druck (wie in 2D) zu Nutze machen, welche durch die Euler-Gleichung beschrieben wird. Ihr zufolge sind im Spektralbereich der Schalldruck, der Druckgradient und die Normalschnelle in einer Ebene über die folgende Beziehung verknüpft:

$$\nu_{z}(k_{x},k_{y},z_{0}) = -\frac{1}{j\omega\rho}\nabla\psi(k_{x},k_{y},z_{0})\mathbf{e}_{\mathbf{z}} = -\frac{1}{j\omega\rho}\psi_{\partial z_{0}}(k_{x},k_{y},z_{0}) = \frac{k_{z}(k_{x},k_{y})}{\omega\rho}\psi(k_{x},k_{y},z_{0})$$
(62)

Wie man sieht sind Normalschnelle und Normalgradient des Schalldrucks lediglich über einen konstanten Faktor inklusive Phasenverschiebung miteinander gekoppelt, während die Umwandlung der beiden Größen in das Wellenspektrum des Schalldrucks durch eine zweidimensionale Übertragungsfunktion realisiert wird. Mit diesem Wissen lassen sich alle akustischen Schallfeldgrößen für jeden Ort des dreidimensionalen Schallfeldes bestimmen, sofern entsprechende Randwertvorgaben vorliegend sind.

Nun soll durch die Vorgabe der Normalschnelle eine Schwingung in der Bezugsebene erzwungen und der Schalldruck entlang einer beliebig parallel verschobenen Ebene ausgewertet werden. Dafür wird zuerst das zugehörige Schnellespektrum mittels Fouriertransformation ermittelt und anschließend durch die Bewertung mit einer komplexen Übertragungsfunktion in das Wellenspektrum des Schalldrucks überführt. Durch anschließende Multiplikation des bewerteten Schnellespektrums mit dem exponentiellen Ausbreitungsterm für die z-Richtung wird das Wellenspektrum an den Bestimmungsort im oberen Halbraum verschoben. Die Reihenfolge der beiden linearen Filterungen spielt dabei natürlich keine Rolle. Die inverse Fouriertransformation liefert schlussendlich die örtliche Verteilung des Schalldrucks in dieser Ebene. Die Berechnungsschritte bei gegebenem Druckgradienten in der Bezugsebene können analog erfolgen

$$\nu_z(k_x, k_y, z_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} v_z(x, y, z_0) e^{jk_x x} e^{jk_y y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \mathcal{F}_{xy}\{v(x, y, z_0)\},$$
(63)

$$\psi(k_x, k_y, z_0) = \frac{\omega \rho}{k_z(k_x, k_y)} \nu_z(k_x, k_y, z_0) = \frac{\omega \rho}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \nu_z(k_x, k_y, z_0),$$
(64)

$$\psi(k_x, k_y, z) = \psi(k_x, k_y, z_0) = \omega \rho \frac{e^{-j(z-z_0)k_z(k_x, k_y)}}{k_z(k_x, k_y)} \nu_z(k_x, k_y, z_0),$$
(65)

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y = \mathcal{F}_{k_x k_y}^{-1} \{ \psi(k_x, k_y, z) \}.$$
 (66)

Zusammengefasst lässt sich die folgende Grundgleichung für die Bestimmung des Schalldrucks in einer xy-Ebene in z bei gegebener Normalschnelle in der Bezugsebene z_0 anschreiben als

$$p(x,y,z) = \frac{\omega\rho}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nu_z(k_x,k_y,z_0) \frac{e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$
(67)

Diese Gleichung enthält nun eine weitere komplexe Übertragungsfunktion, die wie schon im zweidimensionalen Fall einen Wurzelpol und damit eine Singularität aufweist. Der konstante Vorfaktor $\omega \rho$ wird für die folgenden Betrachtungen unterdrückt.

$$G_{vp} = |G_{vp}|e^{j\angle G_{vp}} = \frac{1}{k_z(k_x, k_y)} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}.$$
(68)

Sobald die planare Ortswellenzahl $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ den Wert der Schwingwellenzahl $\pm k$ annimmt, kommt es sofern $\nu_z(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pm k, z_0) \neq 0$ zu einer unendlichen Verstärkung der Amplitude der tangential zur Ebene laufenden Wellen. Dadurch wird zum Einen die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung verletzt, zum Anderen läuft man Gefahr bei der Diskretisierung eben jene Unendlichkeitsstelle genau zu treffen, was zu sinnlosen Ergebnissen in der Rekonstruktion führen würde. Es bedarf also auch im Dreidimensionalen Fall einer unabdingbaren Regularisierung dieser Polstelle.

Werden Betrag und Phasengang der Übertragungsfunktion für sich betrachtet, ergeben sich folgende zweidimensionale Funktionen und deren räumliche Abbildungen.

$$|G_{vp}| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \le k, \\ \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}}, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k. \end{cases}$$
(69)

$$\angle G_{vp} = \begin{cases} 0, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \le k, \\ \frac{\pi}{2}, & \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k. \end{cases}$$
(70)



Abbildung 24 – Betrag und Phase der zweidimensionalen Übertragungsfunktion G_{vp} zur Umwandlung von Schnelle- in Druckspektrum

Die Darstellung als Funktionen der planaren Ortswellenzahl $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ resultiert wieder in den gleichen Kurvenverläufen und Abhängigkeiten wie im zweidimensionalen Fall.

Während der Betragsgang den Verlauf einer Resonanzkurve mit anschließendem Tiefpasscharakter aufweist, beschreibt der Phasenverlauf eine Phasendrehung um $+90^{\circ}$. Die Schwingwellenzahl k markiert auch hier wieder die Grenzfrequenz.

Der Betrag und Phasengang der kaskadierten Übertragungsfunktion $G_{pp}G_{vp}$ zur Überführung des Schnellespektrums in das Wellenspektrum des Schalldrucks (G_{vp}) und dessen Projektion in eine andere Ebene (G_{pp}) wird in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Abbildung 25 – Betrag und Phase der zweidimensionalen, kaskadierten Übertragungsfunktion $G_{vp}G_{pp}$ zur Umwandlung von Schnelle- in Druckspektrum und anschließender Schalldruckausbreitung

2.3 Physikalisch korrekter Ausbreitungsterm in 3D

Auch für den dreidimensionalen Fall lässt sich wieder eine äquivalente Formulierung der Lösung beider Randwertaufgaben im Ortsbereich finden. Die Verknüpfung der Operationen im Wellenzahl- und Ortsbereich liefert wieder der Faltungssatz mit

$$\mathcal{F}_{xy}\{f(x,y) * *g(x,y)\} = \tilde{f}(k_x,k_y)\tilde{g}(k_x,k_y)$$

bzw.
$$f(x,y) * *g(x,y) = \mathcal{F}_{k_x,k_y}^{-1}\{\tilde{f}(k_x,k_y)\tilde{g}(k_x,k_y)\}.$$
(71)

An die Stelle der Bewertung der Spektren mit einer zweidimensionalen Übertragungsfunktion im Fourierbereich tritt demnach eine zweidimensionale Faltung der örtlichen Verteilungen mit einem Ausbreitungsterm. Wird die Normalkomponente der Schnelle an der Berandung vorgegeben, entspricht dieser Ausbreitungsterm wieder der inversen Fouriertransformation der Kaskade der Übertragungsfunktionen G_{vp} und G_{pp} , was aus folgender Gleichung hervorgeht

$$p(x, y, z) = \frac{\omega \rho}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \nu_z(k_x, k_y, z_0) \frac{e^{-jk_z(k_x, k_y)z}}{k_z(k_x, k_y)} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y$$

$$= \omega \rho \mathcal{F}_{k_x, k_y}^{-1} \{ \nu_z(k_x, k_y, z_0) [G_{vp} G_{pp}] \}$$

$$= v_z(k_x, k_y, z_0) * * \left[\frac{\omega \rho}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_z(k_x, k_y)z}}{k_z(k_x, k_y)} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y \right]$$

$$= v_z(k_x, k_y, z_0) * * \omega \rho \mathcal{F}_{k_x, k_y}^{-1} \{ \frac{e^{-jk_z(k_x, k_y)z}}{k_z(k_x, k_y)} \}.$$
(72)

Das erste Rayleigh-Integral für das dreidimensionale Problem liefert auch hier wieder eine korrekte Formulierung des örtlichen Ausbreitungsterm, welcher durch die rotationssymmetrische Green'sche Funktion für das Freifeld in drei Dimensionen gegeben ist. Daraus folgt die Forderung

$$\omega\rho\mathcal{F}_{k_x,k_y}^{-1}\left\{\frac{e^{-jk_z(k_x,k_y)z}}{k_z(k_x,k_y)}\right\} = \frac{\omega\rho}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_z(k_x,k_y)z}}{k_z(k_x,k_y)} e^{-jk_xx} e^{-jk_yy} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$

$$= 2j\omega\rho G_{3D}(x,y) = j\omega\rho \frac{e^{-jkr}}{2\pi r}.$$
(73)

Dabei entspricht $r = ||\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$ der Distanz zwischen dem jeweiligen Quell- und Aufpunkt im geschlossenen Halbraum. Die stabile Übertragungsfunktion zur Gewichtung des Schnellespektrums kann aus der Fouriertransformation des örtlichen Ausbreitungsterms gewonnen werden. Der Vorfaktor wird dabei erneut vernachlässigt.

$$G_{vp}G_{pp} = \frac{e^{-jk_z(k_x,k_y)z}}{k_z(k_x,k_y)} = \frac{j}{2\pi} \mathcal{F}_{xy} \left\{ \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} = 2j\mathcal{F}_{xy} \left\{ G_{3D}(x,y) \right\}$$
(74)

Um die Unterschiede in den zweidimensionalen Übertragungsfunktionen der Fourier- und Rayleigh-Methode zu verdeutlichen ist es zweckgemäß, deren Betrag und Phasenwinkel als Oberflächenfunktionen darzustellen. Da es sich bei den Übertragungsfunktionen aber um rotationssymmetrische Funktionen handelt, können diese alternativ auch über die planare Ortswellenzahl $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ aufgetragen werden.



Abbildung 26 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs der 3D Monopolquelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

Im Fall einer Schalldruckvorgabe an der Berandung ergibt sich der Ausbreitungsterm für die zweidimensionale Faltung im Ortsbereich wieder aus der inversen Fouriertransformation der Übertragungsfunktion G_{pp} zur Realisierung der Schalldruckausbreitung.

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(k_x, k_y, z_0) e^{-jk_z(k_x, k_y)z} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y$$

$$= \mathcal{F}_{k_x k_y}^{-1} \left\{ \psi_0(k_x, k_y, z_0) G_{pp} \right\}$$

$$= p(x, y, z_0) * * \left[\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_z(k_x, k_y)z} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y \right]$$

$$= p(x, y, z_0) * * \mathcal{F}_{k_x k_y}^{-1} \left\{ e^{-jk_z(k_x, k_y)z} \right\}$$

(75)

Gemäß dem zweiten Rayleigh-Integral für drei Dimensionen entspricht der korrekte örtliche Ausbreitungsterm der Normalableitung der 3D Punktquelle, gegeben durch die Green'schen Funktion für das Freifeld $\frac{\partial G_{3D}}{\partial n}$. Daraus folgt die Forderung

$$\mathcal{F}_{k_x k_y}^{-1} \left\{ e^{-jk_z(k_x, k_y)z} \right\} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_z(k_x, k_y)z} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$

$$= 2 \frac{\partial G_{3D}(x, y)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} = -z \frac{e^{-jkr}}{2\pi r^3} \left(jkr + 1 \right) = -\cos(\varphi) \frac{e^{-jkr}}{2\pi r^2} \left(jkr + 1 \right)$$
(76)

Die zugehörige Übertragungsfunktion liefert die Transformation in den Fourierbereich:

$$G_{pp} = e^{-jk_z(k_x,k_y)z} = \mathcal{F}_{xy}\left\{-\cos(\varphi)\frac{e^{-jkr}}{2\pi r^2}\left(jkr+1\right)\right\} = 2\mathcal{F}_{xy}\left\{\frac{\partial G_{3D}(x,y)}{\partial z}\right\}$$
(77)



Abbildung 27 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs der 3D Dipolquelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

Der Sollverlauf der Übertragungsfunktion G_{vp} kann schlussendlich wieder aus der Division der beiden Übertragungsfunktionen für Schalldruck- und Normalschnellevorgabe gemäß der Rayleigh-Methode bestimmt werden. Somit gilt

$$G_{vp} = \frac{\mathcal{G}_{pp}G_{vp}}{\mathcal{G}_{vp}} = \frac{e^{-jk_z(k_x,k_y)z}}{k_z(k_x,k_y)e^{-jk_z(k_x,k_y)z}}$$

$$= \frac{\mathcal{F}_{xy}\left\{\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right\}}{\mathcal{F}_{xy}\left\{-\cos(\varphi)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r^2}\left(jkr+1\right)\right\}} = \frac{\mathcal{F}_{xy}\left\{G_{3D}(x,y)\right\}}{\mathcal{F}_{xy}\left\{\frac{\partial G_{3D}(x,y)}{\partial z}\right\}}$$
(78)



Abbildung 28 – Gegenüberstellung des Betrags- und Phasenverlaufs der kritischen Polstelle gemäß der Rayleigh- und Fourier-Methode

2.4 Regularisierung in 3D durch Glättungsfunktionen zur numerischen Integration

2.4.1 3D Rechteckfunktion

Die Regularisierung des Wurzelpols für den dreidimensionalen Fall kann analog zum zweidimensionalen Fall durch Glättung des betroffenen Funktionsterms mittels einer Rechteckfunktion erfolgen. Als Ausgangsgleichung dient das Integral für die Bestimmung des Schalldrucks in einer beliebigen xy-Ebene in z = const. bei gegebenem Druckgradienten in der Bezugsebene z_0 . Nur in dieser Gleichung kommt der kritische Wurzelpol vor und bedarf einer Regularisierung. Unter Vernachlässigung des Vorfaktors lässt sich die Grundgleichung anschreiben als

$$p(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\partial \tilde{p}(k_x, k_y, z_0)}{\partial z_0}}_{\tilde{p}_{\partial z_0}(k_x, k_y, z_0)} e^{-j(z-z_0)\sqrt[*]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \frac{1}{-j\sqrt[*]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$
(79)

Mit Ausnahme der Übertragungsfunktion die den Wurzelpol enthält können alle Funktionsterme problemlos im Wellenzahlraum auf einem äquidistanten Abtastgitter mit Gitterbreite $l_x = l_y = l$ diskretisiert werden mit $k_x = \Delta k_x l$ und $k_y = \Delta k_y l$. Die anschließende Interpolation der diskreten Funktionswerte über kontinuierliche Wellenzahlen k_x und k_y liefert erneut eine Approximation der kontinuierlichen Ausgangsfunktion. Als Interpolationsfunktion wird eine zweidimensionale Rechteckfunktion gewählt, mit der sich eine Stufeninterpolation in beiden Dimensionen realisieren lässt. Die daraus gewonnene interpolierte Funktion lässt sich wiederum als Summe von im Wellenzahlraum verschobener und mit den zugehörigen diskreten Funktionswerten gewichteter Rechtecksfunktionen ausdrücken. Die Diskretisierung der polfreien Funktion in $kx = \Delta k_x l$, $ky = \Delta k_y l$ ergibt

$$A_l = A(\Delta k_x l, \Delta k_y l) = \tilde{p}_{\partial z_0}(\Delta k_x l, \Delta k_y l, z_0) e^{-j(z-z_0)} \sqrt[4]{k^2 - [\Delta k_x l]^2 - [\Delta k_y l]^2} e^{-j\Delta k_x lx} e^{-j\Delta k_y ly}$$

$$\tag{80}$$

Die anschließende Stufeninterpolation liefert eine Approximation der kontinuierlichen Ausgangsfunktion gemäß

$$A(k_x, k_y) \approx A_{\Box^2}(k_x, k_y) = \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \prod_{\substack{(l_x - \frac{1}{2}) \Delta k_x, (l_y - \frac{1}{2}) \Delta k_y}} \prod_{(k_x, k_y)} (k_x, k_y)$$
(81)

Dabei markiert \Box^2 die Stufeninterpolation durch die zweidimensionale Rechteckfunktion \prod , die zentriert auf den Wellenzahlbins liegt und sich in positive und negative k_x - und k_y -Richtung jeweils über die halbe Abtastbreite erstreckt. Auf diese Weise lässt sich das ursprüngliche Doppelintegral durch Substitution der originalen, polfreien Funktion durch seine interpolierte Version wie folgt als numerisches Integral approximieren

$$p(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \frac{1}{-j\sqrt[*]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y$$

$$\approx \iint_{-\infty}^{\infty} A_{\Box^2}(k_x, k_y) \frac{1}{-j\sqrt[*]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \qquad (82)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \prod_{(l_x - \frac{1}{2}) \Delta k_x, (l_y - \frac{1}{2}) \Delta k_y} (k_x, k_y) \frac{1}{-j\sqrt[*]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y.$$

Durch das Vertauschen von Integral und Summe, mit entsprechender Anpassung der Integralgrenzen, kann der Schalldruck als Summe von gewichteten, bestimmten Doppelintegralen ausgedrückt werden. Dabei ist der Integrand durch den mit der zweidimensionalen Rechtecksfunktion beaufschlagten Wurzelterm gegeben. Die stückweise Integration nach k_x und k_y kann damit als lokale Rechtecksglättung in zwei Dimensionen interpretiert werden

$$p(x, y, z) = \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{(l_x + \frac{1}{2})\Delta k_x, (l_y + \frac{1}{2})\Delta k_y}(k_x, k_y)}{-j \sqrt[s]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y$$

$$= \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \iint_{(l_y - \frac{1}{2})\Delta k_y}^{(l_y + \frac{1}{2})\Delta k_y} \iint_{(l_x - \frac{1}{2})\Delta k_x}^{(l_x + \frac{1}{2})\Delta k_x} \frac{1}{-j \sqrt[s]{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y.$$
(83)

Um die Glättung der Polstelle normal zum Ausbreitungskreis durchführen zu können und eine analytische Lösung des Doppelintegrals über das Wurzelpolsegment zu erhalten, ist es zweckgemäß den Integrationsbereich in Polarkoordinaten auszudrücken. Um das Integral über die Wellenzahlen k_x und k_y in ein Integral über den Wellenzahlradius $k_r = r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, welche der Projektion des Wellenzahlvektors auf die Bezugsebene entspricht, und den Polarwinkel φ überführen zu können, bedarf es einer Umformung des Wurzelpols.

$$p(x, y, z) = \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \int_{(l_y - \frac{1}{2})\Delta k_y} \int_{(l_x - \frac{1}{2})\Delta k_x} \int_{-jk\sqrt[4]{\sqrt{1 - \frac{[k_x^2 + k_y^2]}{k^2}}}}^{1} dk_x dk_y$$

$$= \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \int_{r1(k_x, k_y)}^{r4(k_x, k_y)} \frac{1}{-jk\sqrt[4]{\sqrt{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}}} r \int_{\varphi_A(r)}^{\varphi_B(r)} d\varphi(r) dr$$

$$= \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \int_{r1(k_x, k_y)}^{r4(k_x, k_y)} \frac{1}{-jk\sqrt[4]{\sqrt{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}}} r \left[\varphi_B(r) - \varphi_A(r)\right] dr$$

$$= \sum_{l_x} \sum_{l_y} A_{l_x, l_y} \int_{r1(k_x, k_y)}^{r4(k_x, k_y)} \frac{1}{-jk\sqrt[4]{\sqrt{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}}} r \Delta\varphi(r) dr$$

$$(84)$$

Die geometrischen Zusammenhänge der Integration einer vom Radius abhängigen Funktion über ein rechteckiges Segment im 1. Quadranten mit $k_x, k_y > 0$ unterhalb der 45° Diagonale sollen in folgender Abbildung verdeutlicht werden.



Abbildung 29 – Geometrische Interpretation der radialen Integration über ein rechteckiges Segment im 1. Quadranten unterhalb der 45° Diagonale (links); Winkeländerung in Abhängigkeit der Position des Rechtecksegments

Die von den Radien erzeugten Kreisbögen weisen bei größeren Ortswellenzahlen innerhalb eines Rechtecks eine derart geringe Krümmungen auf, dass diese gut durch eine Gerade approximiert werden können. Durch diese Annäherung lässt sich der schematische Verlauf der resultierenden Winkeländerung $\Delta \varphi(r)$ für einen wachsenden Wellenzahlradius grob in drei Bereiche unterteilen: Eine monoton steigende Flanke ($r_1 \leq r \leq r_2$), ein konstantes Intervall ($r_2 \leq r \leq r_3$) und eine monoton fallende Flanke ($r_3 \leq r \leq r_4$). Die Winkeländerung $\Delta \varphi(r)$ entspricht somit näherungsweise einer trapezförmigen Funktion, welche sich wiederum durch zwei lokal begrenzte Rampenfunktionen mit reziproker Steigung und einer Rechteckfunktion ausdrücken lässt. Werden die konstanten und linearen Terme der entsprechenden Funktionen getrennt integriert, so lassen sich in allen Fällen wieder analytische Lösungen finden. Das Teilintegral, das als abschnittsweise durchgeführte radiale Glättung des Wurzelterms interpretiert werden kann, lässt sich in drei Teile unterteilen

$$I_{pol} = \int_{r_1}^{r_4} \frac{r}{-jk\sqrt[4]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta\varphi(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{-jk\sqrt[4]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta\varphi\frac{(r-r_1)}{(r_2-r_1)} dr$$
$$+ \Delta\varphi \int_{r_2}^{r_3} \frac{r}{-jk\sqrt[4]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{-jk\sqrt[4]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta\varphi\frac{(r_4-r)}{(r_4-r_3)} dr = I_{12} + I_{23} + I_{34}$$
(85)

Im folgenden Abschnitt werden die Lösungen der Teilintegrale für die einzelnen Abschnitte angeführt. Bereich r1-r2: Steigende Rampe

$$I_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{-jk\sqrt[\kappa]{1-\left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r-r_1)}{(r_2-r_1)} dr = \frac{\Delta \varphi}{k(r_2-r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt[\kappa]{\left[\frac{r}{k}\right]^2-1}} (r-r_1) dr = \frac{\Delta \varphi}{k(r_2-r_1)} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{\sqrt[\kappa]{\left[\frac{r}{k}\right]^2-1}} dr - r_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt[\kappa]{\left[\frac{r}{k}\right]^2-1}} dr \right]$$
(86)

Für die weiteren Betrachtungen wird eine Substitution des Quotienten von Radius und Schwingwellenzahl vorgenommen.

Substitution:
$$u = \frac{r}{k}$$

$$I_{12} = \frac{\Delta \varphi}{k(r_2 - r_1)} \left[k^3 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - k^2 r_1 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right] =$$

$$\frac{k\Delta \varphi}{(r_2 - r_1)} \left[k \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - r_1 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right]$$
(87)

Die Lösung des Integrals mit linearem Zählerterm entspricht dem bereits bekannten Ausdruck für die Glättung des Wurzelterms in einer Dimension mittels Dreiecksfunktion. Das Integral mit quadratischem Zählerterm lässt sich mit Hilfe der folgenden Identität lösen:

$$\frac{1}{\Delta u} \int_{a}^{b} \frac{u^{2}}{\sqrt[s]{u^{2}-1}} du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt[s]{u^{2}-1} \Big|_{a}^{b} + \ln(u\sqrt[s]{u^{2}-1}+x) \Big|_{a}^{b} \right] = \frac{1}{2} \left[b\sqrt[s]{b^{2}-1} - a\sqrt[s]{a^{2}-1} + \ln(b\sqrt[s]{b^{2}-1}+x) - \ln(a\sqrt[s]{a^{2}-1}+x) \right] = \frac{1}{2} \left[b\sqrt[s]{b^{2}-1} - a\sqrt[s]{a^{2}-1} + \ln\left[\frac{\sqrt[s]{b^{2}-1}+b}{\sqrt[s]{a^{2}-1}+a}\right] \right]$$
(88)

Damit lässt sich folgende analytische Lösung für das Integral I_{12} anschreiben

$$I_{12} = \frac{k\Delta\varphi}{(r_2 - r_1)} \left[\frac{k}{2} \left[\left(\frac{r_2}{k}\right) \sqrt[*]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \left(\frac{r_1}{k}\right) \sqrt[*]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} + \ln\left[\frac{\sqrt[*]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_2}{k}\right)}{\sqrt[*]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_1}{k}\right)} \right] \right] - r_1 \left[\sqrt[*]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[*]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} \right] \right]$$
(89)

Bereich r3-r4: Fallende Rampe

Die Berechnungen erfolgen analog zur steigenden Rampe.

$$I_{34} = \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{-jk\sqrt[4]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r_4 - r)}{(r_4 - r_3)} dr = \frac{\Delta \varphi}{k(r_4 - r_3)} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{\sqrt[4]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} (r_4 - r) dr = \frac{\Delta \varphi}{k(r_3 - r_4)} \left[r_4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt[4]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr - \int_{r_3}^{r_4} \frac{r^2}{\sqrt[4]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr \right]$$
(90)

Substitution:
$$u = \frac{r}{k}$$

 $I_{34} = \frac{\Delta \varphi}{k(r_4 - r_3)} \left[k^2 r_4 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - k^3 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right] =$

$$\frac{k\Delta \varphi}{(r_4 - r_3)} \left[r_4 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - k \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right]$$
(91)

$$I_{34} = \frac{k\Delta\varphi}{(r_4 - r_3)} \left[r_4 \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} \right] - \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1}} - \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1}} + \ln\left[\frac{\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_4}{k}\right)}{\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_4}{k}\right)} \right] \right]$$
(92)

Bereich r2-r3: Konstanter Term

$$I_{23} = \Delta \varphi \int_{r_2}^{r_3} \frac{r}{-jk \sqrt[\kappa]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} dr = \frac{\Delta \varphi}{k} \int_{r_2}^{r_3} \frac{r}{\sqrt[\kappa]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr$$
(93)

Substitution:
$$u = \frac{\tau}{k}$$

$$I_{23} = \frac{\Delta \varphi k^2}{k} \int_{\frac{r_2}{k}}^{\frac{r_3}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du = \Delta \varphi k \left[\sqrt[s]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[s]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} \right]$$
(94)

Gesamtlösung

Damit lässt sich die Gesamtlösung für das Integral zur radialen Glättung des kritischen Wurzelpols durch die Summe der Teilintegrallösungen zusammenfassen als

$$I_{pol} = I_{12} + I_{23} + I_{34} = \frac{k\Delta\varphi}{(r_2 - r_1)} \left[\frac{k}{2} \left[\left(\frac{r_2}{k}\right)^* \sqrt{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \left(\frac{r_1}{k}\right)^* \sqrt{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} + \ln\left[\frac{\sqrt[4]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_2}{k}\right)}{\sqrt[4]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_1}{k}\right)} \right] \right] - r_1 \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} \right] \right] + \Delta\varphi k \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} \right] + \frac{k\Delta\varphi}{(r_4 - r_3)} \left[r_4 \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} \right] \right] - \frac{k}{2} \left[\left(\frac{r_4}{k}\right)^* \sqrt{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} - \left(\frac{r_3}{k}\right)^* \sqrt{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} + \ln\left[\frac{\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_4}{k}\right)}{\sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} + \left(\frac{r_4}{k}\right)} \right] \right] \right]$$
(95)

Dieser Ausdruck entspricht der geglätteten Übertragungsfunktion zur Umrechnung des Druckgradienten in den Schalldruck und weist in dieser Form keine Singularitäten mehr auf. Die Polstelle des ursprünglichen Wurzelterms kann damit erfolgreich regularisiert werden, solange die diskrete Abtastung im Wellenzahlraum nicht zu fein gewählt wird. Damit lässt sich die alternative Diskretisierung der Gleichung zur Bestimmung des Schalldrucks als IDFT mit der Diskretisierung $e^{j\frac{2\pi}{N_x}l_xm_x}$ in k_x und $e^{j\frac{2\pi}{N_y}l_ym_y}$ in k_y anschreiben als:

$$k_x \to \Delta k_x l_x, \qquad x \to \Delta x m_x, \qquad k_y \to \Delta k_y l_y, \qquad y \to \Delta y m_y$$

$$e^{jk_x x} \to e^{j\Delta k_x l_x \Delta x m_x} = e^{j\frac{2\pi}{N_x} l_x m_x}, \qquad \Delta k_x = \frac{2\pi}{N_x \Delta x} = \frac{2\pi}{L_x}$$

$$e^{jk_y y} \to e^{j\Delta k_y l_y \Delta y m_y} = e^{j\frac{2\pi}{N_y} l_y m_y}, \qquad \Delta k_y = \frac{2\pi}{N_y \Delta y} = \frac{2\pi}{L_y}$$
(96)

$$p_{m_x,m_y}(z) = \sum_{l_x} \sum_{l_y} \tilde{p} \left(\frac{2\pi}{L_x} l_x, \frac{2\pi}{L_x} l_y, z_0 \right)_{\partial z_0} e^{-j(z-z_0) \sqrt[4]{k^2 - [\frac{2\pi}{L_x} l_x]^2 - [\frac{2\pi}{L_y} l_y]^2}} \\ \cdot \quad I_{pol}(r_1, r_2, r_3, r_4) e^{-j\frac{2\pi}{N_x} l_x m_x} e^{-j\frac{2\pi}{N_y} l_y m_y}$$
(97)

mit

$$r_{1} = \sqrt{\left[\Delta k_{x}\left(l_{x}-\frac{1}{2}\right)\right]^{2} + \left[\Delta k_{y}\left(l_{y}-\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}, \quad r_{2} = \sqrt{\left[\Delta k_{x}\left(l_{x}-\frac{1}{2}\right)\right]^{2} + \left[\Delta k_{y}\left(l_{y}+\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}$$

$$r_{3} = \sqrt{\left[\Delta k_{x}\left(l_{x}+\frac{1}{2}\right)\right]^{2} + \left[\Delta k_{y}\left(l_{y}-\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}, \quad r_{4} = \sqrt{\left[\Delta k_{x}\left(l_{x}+\frac{1}{2}\right)\right]^{2} + \left[\Delta k_{y}\left(l_{y}+\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_{23} = \arctan\left[\frac{\sqrt{r_{2}^{2} - \Delta k_{x}^{2}\left(l_{x}-\frac{1}{2}\right)^{2}}}{\Delta k_{x}^{2}\left(l_{x}-\frac{1}{2}\right)^{2}}\right] - \arctan\left[\frac{\Delta k_{y}^{2}\left(l_{y}-\frac{1}{2}\right)^{2}}{\sqrt{r_{2}^{2} - \Delta k_{y}^{2}\left(l_{y}-\frac{1}{2}\right)^{2}}}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{\Delta k_{y}^{2}\left(l_{y}+\frac{1}{2}\right)^{2}}{\sqrt{r_{3}^{2} - \Delta k_{y}^{2}\left(l_{y}+\frac{1}{2}\right)^{2}}}\right] - \arctan\left[\frac{\sqrt{r_{3}^{2} - \Delta k_{x}^{2}\left(l_{x}+\frac{1}{2}\right)^{2}}}{\Delta k_{x}^{2}\left(l_{x}+\frac{1}{2}\right)^{2}}\right]$$
(98)

Die angegebenen geometrischen Zusammenhänge gelten für den 1. Quadranten mit $k_x, k_y > 0$ unterhalb der 45°-Diagonale und müssen gegebenenfalls für die anderen Quadranten des Wellenzahlraumes entsprechend adaptiert werden um Phasendrehungen in der regularisierten Funktion zu vermeiden. Da der Wuzelpolterm eine Rotationssymmetrie um die k_z -Achse aufweist ist es zweckgemäß den regularisierten Term für den Bereich unterhalb der 45°-Diagonale auszuwerten und anschließend an der Diagonale und den k_x - und k_y -Achsen zu spiegeln. Für $k_x = k_y = 0$ wird der ungeglättete Abtastwert verwendet.

Um die Validität der vorgeschlagenen 3D-Regularisierung der Polstelle zu überprüfen wird erneut die modifizierte Übertragungsfunktion mit der originalen Übertragungsfunktion der Fourier-Methode, sowie mit der 3D-Green'schen Funktion des Rayleigh-Integrals in Betrag und Phasenwinke verglichen. Da es sich in diesem Fall um zweidimensionale Funktionen der Ortswellenzahlen k_x und k_y handelt, wird für die folgenden Darstellungen des Frequenzgangs eine der beiden Wellenzahlen fixiert, um Betrag und Phase als

Funktion der anderen Wellenzahl angeben zu können. Um Gibb's-Artefakte bei der Transformation der örtlichen Monopolquelle des Rayleigh-Integrals zu vermeiden, wird ein zweidimensionales Hann-Fenster (d.h. in $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$) eingesetzt um eine geglättete Übertragunsgsfunktion zu erhalten. Um den Betrags- und Phasenschwankungen zu umgehen, die durch die Fensterung an der Polstelle hervorgerufen werden, wird eine zweite, ungefensterte Übertragungsfunktion definiert. Der Bereich um die Polstelle wird der ungefensterten Funktion entnommen und anstelle des geglätteten Pols angezeigt. Die folgenden Untersuchungen erfolgen analog zu denen der 2D-Regularisierung, wobei der Frequenzgang entlang der Abszisse k_x für alleinige Wellenausbreitung in x-Richtung bei einer fixierten Ortswellenzahl von $k_y = 0$ angegeben wird. Zusätzlich wird im Anschluss auch die Auswirkung der radialen Glättung abseits der Abszisse für ausgewählte k_y untersucht. Die betrachteten Schwingwellenzahlen k werden erneut mit einem Offset von +0.001 in unmittelbarer Nähe eines Stützwertes des diskreten Spektrums platziert, um die Resonanzüberhöhung an der Polstelle der unregularisierten Übertragungsfunktion hervorzuheben.

Unterschiedliche Wellenzahlen k:



Abbildung 30 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlen k

Unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl:



Abbildung 31 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für Unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl



Unterschiedliche Quellabstände z:

Abbildung 32 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Quellabstände z

Unterschiedliche Schwingwellenzahlen:



Abbildung 33 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Schwingwellenzahlen

Wie man sieht, lässt sich die Polstelle mit der vorgeschlagenen Modifikation der Übertragungsfunktion entlang der Abszisse erfolgreich regularisieren. Nun soll die Gültigkeit der Methode bei gleichzeitiger Ortswellenausbreitung in x- und y-Richtung überprüft werden.

Unterschiedliche Wellenzahlkombinationen k_x, k_y :

Für dieses Beispiel wird die Schwingwellenzahl mit $k = \Delta k_x \cdot (\frac{N}{2}) \cdot \frac{3}{4}$ festgelegt. Die betrachteten Ortswellenzahlen k_y werden dabei so definiert, dass das untersuchte Teilspektrum in k_x jeweils die Polstelle am Ausbreitungskreis bei 45°, 22.5° und 11.25° enthält. Dies entspricht den Ortswellenzahlen $k_{y1} = \frac{k}{2}$, $k_{y2} = \frac{k}{4}$ und $k_{y3} = \frac{k}{8}$.



Abbildung 34 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlenkombinationen k_x, k_y

Mit wachsendem Radius (von rechts nach links) wandert die Polstelle immer Näher in Richtung der Gleichanteilskomponente. Dabei liegt der Pol bei bestimmten Wellenzahlkombinationen näher an einem spektralen Stützwert als bei anderen, wodurch die Resonanzüberhöhung der Fourier-Methode in Abhängigkeit der Wellenzahlen unterschiedliche Ausmaße annimmt. Im schlimmsten Fall kommt der Pol genau auf einem Stützwert zum Liegen und erzeugt eine lokale Singularität im Wellenzahlraum. Die modifizierte Übertragungsfunktion weißt hingegen über alle Wellenzahlkombinationen eine annähernd gleich große Resonanz auf, welche sich relativ gut mit dem Betragsverlauf der Green'schen Ausbreitungsfunktion deckt. Auch der Phasensprung wird durch die vorgeschlagene Regularisierung korrigiert. Der Phasenfehler nimmt jedoch zu, je weiter die Polstelle von einem Stützwert entfernt liegt, was durch die zunehmende Betragsunterschätzung der unregularisierten Übertragungsfunktion erkennbar ist. Dieses Verhalten des Phasengangs konnte im vorangegangenen Beispiel durch die unterschiedlichen Wellenzahllagen bewusst forciert werden, tritt hier jedoch willkürlich durch die Verschiebung der Polstelle im Radius auf. Dieser Effekt lässt sich somit auch nicht wie im zweidimensionalen Fall durch eine geschickt gewählte Diskretisierung vermeiden sondern muss bei vereinzelten Wellenzahlkombinationen in Kauf genommen werden. Wird k_x als konstante Wellenzahl angenommen und das Teilspektrum in k_y untersucht, ist ein gleiches Kurvenverhalten an der Polstelle zu beobachten. Die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich aufgrund der Rotationssymmetrie der Übertragungsfunktion auch auf die anderen Quadranten des Wellenzahlraumes übertragen. Mit der vorgeschlagene Methode lässt sich der kritische Wurzelpol somit unabhängig von seiner Lage erfolgreich im gesamten Wellenzahlraum regularisieren.

2.4.2 Approximation mit konstantem Radius

Die vorgeschlagene alternative Diskretisierung zur Regularisierung des Wurzelpols erfüllt zwar seinen Zweck, sie ist jedoch aufgrund der mehrtermigen analytischen Lösung des Integrals mit quadratischem Integranden sehr lang. Als mögliche Vereinfachung wird eine Approximation des Glättungsintegrals mit konstantem Radius vorgeschlagen. Dadurch werden die quadratischen Zählerterme wegrationalisiert, wodurch sich nur noch lineare und konstante Zähler in den Integralen ergeben. Diese lassen sich wiederum mit den bereits bekannten Identitäten für die eindimensionale Rechteck- und Dreiecksfunktion lösen und erlauben es den regularisierten Wurzelpol in kompakterer Form anzuschreiben. Diese Vereinfachung stellt für größere Radii, und damit respektive auch größere Wellenzahlen, eine recht gute Annäherung dar. Den Ausgangspunkt für die Herleitung stellt das Abschnittsintegral zur Glättung des Wurzelpols im Radius und Polarwinkel dar, wobei die Radiusvariable nun für jedes zu integrierende Teilstück konstant gehalten wird

$$Annahme: r = r_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$I_{pol} = r_0 \int_{r_1}^{r_4} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi(r) dr = r_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r - r_1)}{(r_2 - r_1)} dr$$

$$+ r_0 \Delta \varphi \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} dr + r_0 \int_{r_3}^{r_4} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r_4 - r)}{(r_4 - r_3)} dr = I_{12} + I_{23} + I_{34}.$$
(99)

Im folgenden Abschnitt werden die Lösungen der Teilintegrale mit konstantem Radius angeführt.

Bereich r1-r2: Steigende Rampe

$$I_{12} = r_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r - r_1)}{(r_2 - r_1)} dr = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} (r - r_1) dr = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_2 - r_1)} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr - r_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr \right]$$
(100)

Substitution:
$$u = \frac{r}{k}$$

$$I_{12} = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_2 - r_1)} \left[k^2 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - kr_1 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{1}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right] =$$

$$\frac{\Delta \varphi r_0}{(r_2 - r_1)} \left[k \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - r_1 \int_{\frac{r_1}{k}}^{\frac{r_2}{k}} \frac{1}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right]$$
(101)

Die Lösung der Integrale mit konstantem und linearem Zählerterm erfolgt jeweils über die Identitäten (34) und (41) mit

$$I_{12} = \frac{\Delta\varphi r_0}{(r_2 - r_1)} \left[k \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} \right] - r1 \left[\operatorname{arcosh}^*\left(\frac{r_2}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^*\left(\frac{r_1}{k}\right) \right] \right]$$
(102)

Bei der Berechnung der fallenden Rampe und des konstanten Terms kann auf gleiche Weise verfahren werden.

Bereich r3-r4: Fallende Rampe

$$I_{34} = r_0 \int_{r_3}^{r_4} \frac{1}{-jk \sqrt[*]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} \Delta \varphi \frac{(r_4 - r)}{(r_4 - r_3)} dr = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_4 - r_3)} \int_{r_3}^{r_4} \frac{1}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} (r_4 - r) dr = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_3 - r_4)} \left[r_4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr - \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{\sqrt[*]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr \right]$$
(103)

Substitution:
$$u = \frac{r}{k}$$

 $I_{34} = \frac{\Delta \varphi r_0}{k(r_4 - r_3)} \left[kr_4 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - k^2 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right] =$

$$\frac{\Delta \varphi}{(r_4 - r_3)} \left[r_4 \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du - k \int_{\frac{r_3}{k}}^{\frac{r_4}{k}} \frac{u^2}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du \right]$$
(104)

$$I_{34} = \frac{\Delta\varphi r_0}{(r_2 - r_1)} \left[r4 \left[\operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_4}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_3}{k}\right) \right] - k \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} \right] \right]$$
(105)

Bereich r2-r3: Konstanter Term

$$I_{23} = \Delta \varphi r_0 \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{-jk \sqrt[s]{1 - \left[\frac{r}{k}\right]^2}} dr = \frac{\Delta \varphi r_0}{k} \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{\sqrt[s]{\left[\frac{r}{k}\right]^2 - 1}} dr$$
(106)

Substitution:
$$u = \frac{r}{k}$$

 $I_{23} = \frac{\Delta \varphi r_0 k}{k} \int_{\frac{r_2}{k}}^{\frac{r_3}{k}} \frac{1}{\sqrt[s]{u^2 - 1}} du = \Delta \varphi r_0 \left[\operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_3}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_2}{k}\right) \right]$
(107)

Gesamtlösung

Die Gesamlösung für das approximierte Integral zur Glättung des Wurzelpols im Radius kann wieder durch die Summe der einzelnen Teilintegrale angeschrieben werden mit

$$Annahme: r = r_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$I_{pol} = I_{12} + I_{23} + I_{34} =$$

$$\frac{\Delta \varphi r_0}{(r_2 - r_1)} \left[k \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_2}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2 - 1} \right] - r_1 \left[\operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_2}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_1}{k}\right) \right] \right]$$

$$+ \Delta \varphi r_0 \left[\operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_3}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_2}{k}\right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta \varphi r_0}{(r_2 - r_1)} \left[r_4 \left[\operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_4}{k}\right) - \operatorname{arcosh}^* \left(\frac{r_3}{k}\right) \right] - k \left[\sqrt[4]{\left(\frac{r_4}{k}\right)^2 - 1} - \sqrt[4]{\left(\frac{r_3}{k}\right)^2 - 1} \right] \right]$$

$$(108)$$

Für $k_x = k_y = 0$ wird der ungeglättete Abtastwert verwendet. Dieser Ausdruck ermöglicht ebenfalls eine erfolgreiche Regularisierung des Wurzelpols und kann unter Verwendung der Diskretisierung (96) anstelle des originalen Glättungsterms in Gleichung (97) mit den zugehörigen Parametern in (98) für die Schalldruckauswertung im Nahfeld einer Quelle unter Vorgabe der Normalschnelle bzw. des Druckgradienten verwendet werden. Der Einfluss der Regularisierung des Wurzelpols auf Betrags- und Phasengang der Funktion wird in den folgenden Abbildungen dargelegt. Die Parametereinstellungen für Abtaststufen N, Quellabstand z und Schwingwellenzahl k wurden aus den vorangegangenen Beispielen für die 3D-Regularisierung übernommen.

Unterschiedliche Wellenzahlen k:



Abbildung 35 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlen k

Unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl:

Abbildung 36 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Anzahl an Abtaststufen N der Wellenzahl

Unterschiedliche Quellabstände z:

Abbildung 37 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Quellabstände z

Unterschiedliche Schwingwellenzahlen:

Abbildung 38 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Schwingwellenzahlen

Unterschiedliche Wellenzahlkombinationen k_x, k_y :

Abbildung 39 – Bode-Diagramm der kritischen Übertragungsfunktion für unterschiedliche Wellenzahlenkombinationen k_x, k_y

2.5 Schallfeldauswertung in 3D

Abschließend soll die Auswirkung der radialen Regularisierung der Polstelle auf die Berechnung des Schallfeldes von ebenen Strahlern anhand von zwei typischen Beispielquellen veranschaulicht werden. Als Benchmark wird erneut das Rayleigh-Integral, sowie die originale Fourier-Methode herangezogen.

2.5.1 Kolbenschwinger

Zuerst wird ein einfacher Kolbenschwinger mit einem Durchmesser von d = 20cm betrachtet, der zentriert in die Bezugsebene $z_0 = 0$ eingebracht wird. Die eingeprägte Normalschnelle beträgt $v(|x| \le 0.1, |y| \le 0.1, z_0) = 1\frac{\mu m}{s}$ und ist in Abbildung 40 dargestellt.

Abbildung 40 – Normalschnelleverteilung des Kolbenschwingers in der Bezugsebene z_0

Das abgestrahlte Schalldruck wird entlang einer Ebene in z = 3cm Entfernung zur Quelle ausgewertet. Die Abmessungen des betrachteten Ortsfensters betragen $40cm \times 40cm$. Das Diskretisierungsgitter wurde für alle betrachteten Methoden mit 128×128 Abtastpunkten festgelegt. Für alle Fourier-basierten Methoden wurde zusätzlich allseitiges *zero-padding* von je 512 Punkten angewandt um Interferenzerscheinungen durch die Wellenfelder der Spiegelquellen bestmöglichst zu minimieren. Die Schwingfrequenz des Kolbens soll in etwa f = 1kHz betragen, entsprechend muss eine Schwingwellenzahl mit einem Wert nahe $k = \frac{2\pi f}{c}$ gewählt werden. Für das erste Beispiel wird die Schwingwellenzahl k der Schallwelle genau zwischen zwei Stützwerten der Bezugsachsen des diskreten Wellenzahlraumes definiert. Dadurch wird bei der originalen Fourier-Methode der Resonanzanstieg der Übertragungsfunktion G_{vp} um die Koinzidenzfrequenz minimal gehalten. Ohne Regularisierung besteht jedoch weiterhin die Gefahr von lokalen, stark ausgeprägten Resonanzüberhöhungen bis hin zu Singularitäten bei bestimmten Wellenzahlpaaren, die die Gleichung $\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = k$ erfüllen, wobei die Schwingwellenzahl im Radius exakt auf einem Wellenzahlbin zum Liegen kommt. Die Auswirkung der Resonanzüberhöhung auf das ausgewertete Schallfeld ist in der folgenden Abbildung 41 zu sehen.

Abbildung 41 – Schalldruckpegelverteilung (SPL) in der Ebene z = 3cm bei günstiger Schwingwellenzahllage; Rayleigh-Methode (oben-links), Fourier-Methode [original] (oben-rechts), Fourier-Methode [regularisiert] (unten-links); Fourier-Methode [regularisiert + approx.] (unten-rechts)

Das Rayleigh-Integral representiert wieder den angestrebten Sollverlauf des Schalldruckfeldes. Ohne Regularisierungsmaßnahmen erzeugt die Fourier-Methode in diesem Fall eine rhombenförmige Schalldruckverteilung. In unmittelbarer Nähe des Kolbens, für mittlere bis hohe Schalldruckpegel, liefert die Fourier-Methode eine annähernd korrekte Darstellung. Das Schallfeld hin zum Rand des betrachteten Ortsfensters, wo geringere Schalldruckpegel vorherrschen, weicht jedoch zunehmends vom erwarteten Schallpegelverlauf auf. Durch die vereinzelten Resonanzüberhöhungen um die Koinzidenzfrequenz in der spektralen Übertragungsfunktion entstehen im Ortsbereich Wellenkomponenten mit sehr hohen Amplituden. Dies betrifft vorwiegend jene Schallwellen, die sich parallel (Spuranpassung) bzw. auch leicht schräg zur Bezugsebene ausbreiten. Für die Auswertung des Schallfeldes werden die verstärkten Wellen mit den restlichen Wellenkomponenten überlagert, was zu ausgeprägten Interferenzmustern führen kann. Verwendet man hingegen die alternativen Diskretisierungen der Fourier-Methode erhält man eine weitestgehend interferenzfreie Darstellung der Schalldruckverteilung in der mit freiem Auge keine Unterschiede zum Ergebnis des Rayleigh-Integrals erkennbar sind. Weiters können keinerlei Unterschiede in den Ergebnissen der radialen Glättung mit variablem Radius und ihrer Approximation mit konstentem Radius festgestellt werden.

Um die Problematik der Polstelle zu verdeutlichen, wird die Schwingwellenzahl k nun in die unmittelbare Nähe eines Stützwertes des diskreten Spektrums verschoben, sodass gerade noch keine Unendlichkeitsstelle auftritt. Die dadurch hervorgerufene Amplitudenverstärkung der schleifend ausbreitenden Wellenkomponenten führt zu einer exzessiven Pegelzunahme von über 100dB und somit zu einem unbrauchbaren Endergebnis. Im Gegensatz dazu liefern die regularisierten Fourier-Methoden auch bei kritischen Schwingwellenzahllagen eine stabile Darstellung des Schallfeldes.

Abbildung 42 – Schalldruckpegelverteilung (SPL) in der Ebene z = 3cm bei ungünstiger Schwingwellenzahllage; Rayleigh-Methode (oben-links), Fourier-Methode [original] (oben-rechts), Fourier-Methode [regularisiert] (unten-links); Fourier-Methode [regularisiert + approx.] (unten-rechts)

2.5.2 Platte

Als zweite Beispielquelle wird eine starr eingespannte, zentriert zum Schwingen angeregte Platte aus Aluminium mit den Maßen 50cm × 50cm verwendet. Die Dicke der Platte beträgt 5mm. Die benötigten materialspezifischen Konstanten umfassen den Elastizitätsmodul $E = 69 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$, die Rohdichte $\rho = 2712 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0.334$. Die antreibende Punktkraft wird mit F = 10N definiert, sodass sie eine maximale Normalschnelle in der Bezugsebene $z_0 = 0$ von ca. $v_{max}(x, y, z_0) = 3 \frac{\mu \text{m}}{\text{s}}$ erzeugt. Die Frequenz der Wechselkraft liegt im Bereich um $f \approx 800$ Hz, was zu der in Abbildung 43 dargestellten Modenstruktur führt

Abbildung 43 – Normalschnelleverteilung auf der Platte in der Bezugsebene z_0

Die Auswertung des Schallfeldes erfolgt wieder in einer z = 3cm von der Quelle entfernten Ebene. Die Diskretisierung der Ortsfunktion wird erneut mit 128×128 Abtastpunkten vorgenommen und für die Fourier-Methoden allseitig um jeweils 512 Nullen ergänzt.

Zuerst wird die Wellenzahl k der Schallwelle wieder zwischen zwei Stützwerte der Bezugsachsen des diskreten Wellenzahlraumes positioniert. Bei der originalen Fourier-Methode sind erneut leichte Abweichungen vom Sollverlauf des Schalldrucks erkennbar. Diese sind jedoch nicht so klar ausgeprägt wie im Fall des Kolbenschwingers und betreffen wieder hauptsächlich Bereiche mit niedrigerem Schalldruckpegel rund um die Eckenmoden der Platte. Durch die Regularisierung der Polstelle können die Darstellungsfehler in den niederpegligen Bereichen erfolgreich behoben und der erwartete Pegelverlauf damit sehr gut angenähert werden. Die Unterschiede zwischen den beiden Regularisierungsmethoden bleiben vernachlässigbar klein und sind mit freiem Auge nicht zu erkennen.

Abbildung 44 – Schalldruckpegelverteilung (SPL) in der Ebene z = 3cm bei günstiger Schwingwellenzahllage; Rayleigh-Methode (oben-links), Fourier-Methode [original] (oben-rechts), Fourier-Methode [regularisiert] (unten-links); Fourier-Methode [regularisiert + approx.] (unten-rechts)

Wird die Schwingwellenzahl k in unmittelbarer Nähe eines spektralen Stützwertes definiert, so kommt es bei der originalen Fourier-Methode wieder zu einer enormen Pegelerhöhung und zu einem unphysikalischen Ergebnis. Erst durch die Anwendung der Regularisierungsmaßnahmen lässt sich dieser Pegelzuwachs unterdrücken und eine stabile Darstellung des Schalldrucks im Nahfeld der Quelle erzeugen.

Abbildung 45 – Schalldruckpegelverteilung (SPL) in der Ebene z = 3cm bei ungünstiger Schwingwellenzahllage; Rayleigh-Methode (oben-links), Fourier-Methode [original] (oben-rechts), Fourier-Methode [regularisiert] (unten-links); Fourier-Methode [regularisiert + approx.] (unten-rechts)

3 Zusammenfassung und Conclusio

Mit der Fourier-Methode der Akustik lässt sich das Schallfeld einer örtlich vorgegebenen Quellverteilung als Überlagerung von ebenen Wellen beschreiben, die sich mit unterschiedlicher Amplitude und Phase in die verschiedenen Raumrichtungen ausbreiten. Die dafür nötigen Berechnung erfolgen allesamt im Wellenzahlraum und beschränken sich auf simple Multiplikationen der Wellenspektren der Schallfeldgrößen mit komplexen Übertragungsfunktionen. Wird der Schalldruck in der Bezugsebene vorgegeben, kann dieser problemlos durch entsprechende Gewichtung im Wellenzahlraum in jede beliebige Ebene projeziert werden. Die inverse Fouriertransformation des projezierten Wellenspektrums liefert dann die gesuchte örtliche Schalldruckverteilung in dieser Ebene. Wird anstelle des Schalldrucks dessen Normalgradient oder die Normalschnelle in der Bezugsebene vorgegeben, ist eine weitere Frequenzbewertung mit einer komplexen Übertragungsfunktion für die Umwandlung der beiden Größen in das Wellenspektrum des Schalldrucks notwendig. Diese Übertragungsfunktion weist bei der Koinzidenzfrequenz eine Polstelle auf, die bei falscher Diskretisierung bei manchen Frequenzen zu Singularitäten im Betragsgang führen kann. Die zugehörigen Wellenkomponenten im Ortsbereich breiten sich dadurch mit unendlich großer Amplitude parallel zur Bezugsebene aus führen zu physikalisch sinnlosen Ergebnissen. Das Einführen einer geeigneten Regularisierung dieser Polstelle ist somit für die Lösung der Randwertaufgabe einer Normalgradient- oder Normalschnellevorgabe unabdingbar. Eine Möglichkeit zur Regularisierung des Wurzelpols ist die Glättung der betroffenen Übertragungsfunktion über kontinuierliche Ortswellenzahlen und einer anschließenden Diskretisierung der geglätteten Übertragungsfunktion als numerisches Integral, welches keine Singularitäten mehr enthält. Für die Glättung der eindimensionalen Übertragungsfunktion (2D-Problem) wurde eine Stufeninterpolation mittels Rechteckfunktion und eine lineare Interpolation mittels Dreiecksfunktion vorgeschlagen und eine modifizierte Gleichung zur Bestimmung des Schalldrucks hergeleitet, die den Glättungskern per Definition enthält. Für die Regularisierung der zweidimensionalen Übertragungsfunktion (3D-Problem) wurde eine Glättung im Radius vorgeschlagen, welche ebenfalls in eine alternativen Diskretisierung der Fourier-Methode eingebettet wurde. Zudem wurde eine Approximation der Radialglättung getestet, die eine vereinfachte Implementierung ermöglicht. Alle vorgeschlagenen Diskretisierungsmethoden ermöglichen eine erfolgreiche Regularisierung der kritischen Polstelle, unabhängig von der Lage der Koinzidenzfrequenz und der verwendeten Anzahl an Abtaststufen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Regularisierungsmethoden sind vernachlässigbar klein. Während die unregularisierte Fourier-Methode bei falsch gewählter Diskretisierung bei der Schallfeldauswertung teils unbrauchbare Ergebnisse liefert, sorgen die regularisierten Fourier-Methoden auch bei kritischen Schwingwellenzahllagen konsistent für eine stabile Darstellung des Schallfeldes.

Zu guter Letzt sei noch angeführt, dass eine der zu Grunde liegenden Fragen: "Verbessert diese Regularisierung auch die akustische Nahfeldholografie?" eher mit Nein zu beantworten ist. In der Nahfeldholografie dürfte das Problem vernächlässigbar sein, denn der Wurzelpol wird in der Inversrechnung zu einer Nullstelle, und der Effekt der Glättung ist vor allem lokal an dieser Stelle wirksam. Die nichtregularisierte Auswertung dieser Nullstelle dürfte keinen ähnlich gearteten, nennenswerten Einfluss auf die Genauigkeit des Ergebnisses in der Nahfeldholografie besitzen, die eher unter der periodischen Wiederholung im Ort und vor allem den extrem hohen Verstärkungen evaneszenter Anteile leidet, wie hinlänglich aus der Literatur bekannt ist.

Literatur

- [DMWL85] J. D. Maynard, E. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography: I. theory of generalized holography and the development of nah," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, 11 1985.
- [Fle87] H. Fleischer, FOURIER-AKUSTIK. Beschreibung der Schallstrahlung von ebenen Schwingern mit Hilfe der räumlichen Fourier-Methode, 11 1987.
- [Sch08] R. Scholte, "Fourier based high-resolution near-field sound imaging," Ph.D. dissertation, Department of Mechanical Engineering, 2008.
- [Wil99] E. G. Williams, *Fourier Acoustics*. Academic Press, 1999.
- [Zot10] F. Zotter, *Akustische Messtechnik 2, LU, Laborunterlagen*, SS 2010. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/sommer-10/amlu
- [Zot11] —, *Akustische Messtechnik 2, LU, Laborunterlagen*, SS 2011. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/sommer-11/amlu
- [Zot12] —, *Akustische Messtechnik 2, LU, Laborunterlagen*, SS 2012. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/sommer-12/amlu
- [Zot13] —, Akustische Holofonie und Holografie, VO, Vorlesungsskriptum, WS 2012/2013. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/winter-12-13/akholo
- [Zot14] —, Akustische Holofonie und Holografie, VO, Vorlesungsskriptum, WS 2013/2014. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/winter-13-14/akholo
- [Zot16] —, Akustische Holofonie und Holografie, VO, Vorlesungsskriptum, WS 2015/2016. [Online]. Available: https://iaem.at/kurse/ws1516/ akustische-holografie-und-holofonie-vo