



Hannes Bradl

Modalsynthese rechteckiger Platten

Bachelorarbeit

Studiengang: Elektrotechnik-Toningenieur

eingereicht an der

Universität für Musik und darstellende Kunst Graz

Betreuer:

DI BSc Marian Weger

Institut für Elektronische Musik und Akustik

Beurteiler: O.Univ.Prof. Mag.art. DI Dr.techn. Robert Hödrich

Graz, Juni 2018

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Anwendung der Modalsynthese auf isotrope rechteckige Platten. Anhand solch einfacher Körper bekommt man ein gutes Verständnis für das Verfahren und die einzelnen Schritte, die bei einer Implementierung zu beachten sind. Im einführenden Teil wird, so ausführlich es im Rahmen einer Bachelorarbeit möglich ist, versucht, grundlegende Prinzipien zu erläutern bzw. herzuleiten. Auch wird kurz auf schwingende Saiten, Stäbe und Membranen eingegangen. Der zweite Teil der Arbeit widmet sich der detaillierten Modellierung rechteckiger Platten, wobei 15 verschiedene Randbedingungen behandelt werden.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	ii
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	3
2.1 Reibungsfreier harmonischer Oszillator	3
2.2 System mit zwei Massen	4
2.3 Eindimensionale kontinuierliche Systeme - Saiten, Stäbe	6
2.3.1 Schwingende Saite	6
2.3.2 Schwingender Stab	8
2.4 Zweidimensionale kontinuierliche Systeme - Membranen, Platten	9
2.4.1 Schwingende Membran	10
2.4.2 Schwingende Platte	10
2.5 Dämpfung am Beispiel der schwingenden Saite	11
2.5.1 Luftdämpfung	11
2.5.2 Innere Dämpfung	12
2.5.3 Energieverlust durch die Aufhängung	12
3 Modalsynthese rechteckiger Platten	14
3.1 Ablauf der Synthese	14
3.2 Berechnung der Modenformen	16
3.3 Berechnung der Eigenfrequenzen	22
3.4 Anregung der Platte	23
3.5 Gewichtung der einzelnen Moden	26
3.6 Frequenzabhängige Dämpfung der Moden	29
4 Evaluierung des Modells	34

Inhaltsverzeichnis

Literatur	39
Anhang	40

Abbildungsverzeichnis

1.1	Modalsynthese eines durch einen Hammerschlag angeregten Stabes	2
2.1	Einfaches Masse-Feder-System	3
2.2	Zweimassensystem	5
2.3	Moden eines 3-Massen-Oszillators	6
2.4	Transversalmoden eines Masse-Feder-Systems	8
2.5	Verschiedene Randbedingungen eines Stabes	9
3.1	Grundmodell der Modalsynthese	15
3.2	Abmessungen einer rechteckigen Platte	16
3.3	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 1	18
3.4	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 2	18
3.5	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 3	19
3.6	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 4	19
3.7	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 5	19
3.8	Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 6	20
3.9	Randbedingungen und zugehörige Koeffizienten zur Berechnung der Eigenfrequenzen [11]	21
3.10	Frequenzen der ersten 100 Moden einer Stahlplatte	23
3.11	Hann-Window	24
3.12	Größen eines Kreissegments	25
3.13	Multiplikation von Modenform und Anregungsfunktion	26
3.14	Gewichtungskoeffizienten für die ersten 225 Moden einer Stahlplatte	27
3.15	Spektrogramme einer Stahlplatte, Anregung am Rand	28
3.16	Spektrogramme einer Stahlplatte, Anregung in der Mitte	29
3.17	Gedämpfte harmonische Schwingung für verschiedene ζ	30
3.18	Verlauf von α für Metall	31

Abbildungsverzeichnis

3.19	Zeitsignal der 1., 10., 100., und 250. Mode	32
3.20	Ausgangssignal der Synthese	33
4.1	Beispielfoto Plattenglocken	34
4.2	Spektrogramme der Aufnahme und des synthetisierten Klangs	36
4.3	Spektrum eines Ausschnitts der Aufnahme	36
4.4	Spektrum eines Ausschnitts der Synthese	37
4.1	Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 1	41
4.2	Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 3	42
4.3	Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 9	43
4.4	Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 14	44
4.5	Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 15	45

1 Einleitung

Wird ein fester Körper angeschlagen oder auf anderem Wege angeregt, führen die Kräfte am Kontaktpunkt zu Verformungen, die sich über den Körper ausbreiten. Abhängig von der Geometrie, den Materialeigenschaften und der Einspannung (den Randbedingungen) des Körpers bilden sich stehende Wellen, wodurch Schall abgestrahlt wird. [10]

Ein gutes Modell zur Berechnung des Klangs solcher Körper ist die Modalsynthese. [9]

Dabei wird ein schwingendes Objekt durch viele gedämpfte harmonische Oszillatoren modelliert, welche durch einen externen Stimulus angeregt werden. Das komplexe Verhalten schwingender Körper kann also durch den Beitrag vieler einzelner Schwingungsmoden beschrieben werden. Die Frequenzen und die Dämpfungen der Oszillatoren werden durch die Geometrie, die Randbedingungen und die Materialeigenschaften bestimmt. Die Gewichtung der einzelnen Sinusschwingungen ist abhängig vom Ort und von der Art der Anregung.

Die Grundzüge der Synthese sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

1 Einleitung

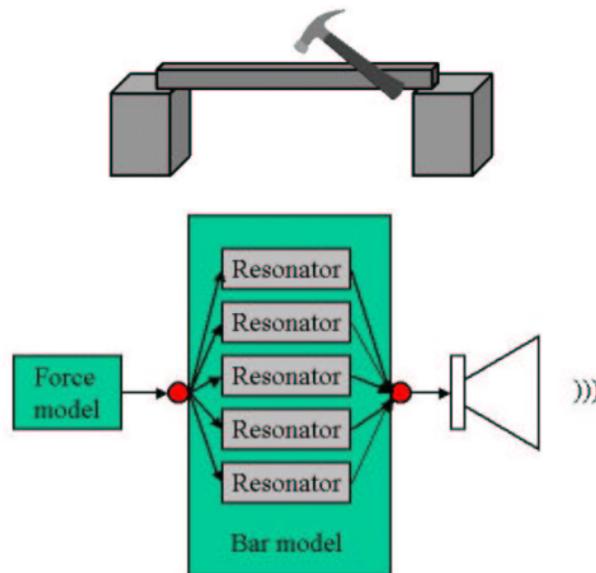


Abbildung 1.1: Modalsynthese eines durch einen Hammerschlag angeregten Stabes [10]

Der genaue Ablauf der Synthese, wie er in dieser Arbeit verwendet wird, wird in Kapitel 3 ausführlich beschrieben.

Theoretisch kann die Modalsynthese zur Beschreibung beliebig geformter schwingender Körper verwendet werden, jedoch ist dabei der Rechenaufwand sehr groß und eine analytische Lösung des Problems kaum möglich. Deshalb bedient man sich im Fall von komplizierten Formen der numerischen Mathematik, um zumindest eine angenäherte Lösung zu finden. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Synthetisierung des Klangs rechteckiger Platten. Anhand dieser bekommt man einen guten Einblick in das Verfahren und es wird ersichtlich, dass auch schon die Modellierung solch einfacher Körper überaus komplex sein kann. Grundsätzlich sind der Verbesserung bzw. Verfeinerung eines Modells quasi keine Grenzen gesetzt.

2 Theoretische Grundlagen

Bevor das eigentliche Thema dieser Arbeit folgt, ist es sinnvoll, die zugrunde liegenden Prinzipien der Modalsynthese zu verstehen.

In diesem Kapitel orientiere ich mich sehr am Buch „The Physics Of Musical Instruments“ (S. 3 – 70) von Neville H. Fletcher und Thomas D. Rossing. [5]

2.1 Reibungsfreier harmonischer Oszillator

Das einfachste schwingungsfähige System ist der eindimensionale harmonische Oszillator. Dieser besteht in der mechanischen Domäne, bei Vernachlässigung der Reibungsverluste, aus einer Masse m und einer Federsteifigkeit K .

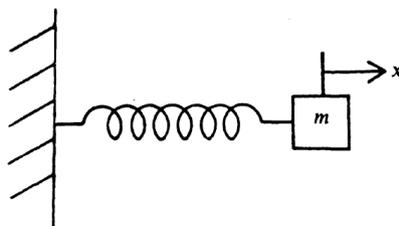


Abbildung 2.1: Einfaches Masse-Feder-System [5](S. 4)

Unter der Voraussetzung, dass die Rückstellkraft der Feder proportional zur Auslenkung ist, kann die Bewegungsgleichung des Systems aufgestellt

2 Theoretische Grundlagen

werden. Aus dem Hookeschen Gesetz, $F = -Kx$ und dem Zweiten Newtonschen Gesetz, $F = ma = m\ddot{x}$ erhält man

$$m\ddot{x} + Kx = 0. \quad (2.1)$$

Substituiert man $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, so vereinfacht sich Gleichung (2.1) zu

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.2)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2.3)$$

die Masse schwingt also cosinusförmig (=harmonisch) mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 .

2.2 System mit zwei Massen

Um die Entstehung von Moden besser zu verstehen eignet sich am besten ein Zweimassensystem.

Betrachtet man das System in Abbildung 2.2(a), bei dem sich die Massen nur in axialer Richtung bewegen können, erhält man die zwei Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 + Kx_1 + K(x_1 - x_2) = 0$$

und

$$m\ddot{x}_2 + Kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0.$$

Geht man von harmonischen Lösungen aus ($x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$) und setzt diese in die obigen Gleichungen ein, ergibt sich

$$-\omega^2 A_1 + \frac{2K}{m} A_1 - \frac{K}{m} A_2 = 0$$

sowie

$$-\omega^2 A_2 + \frac{2K}{m} A_2 - \frac{K}{m} A_1 = 0.$$

Wird weiterhin $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ substituiert, führt das auf folgende Form

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_1 + \omega_0^2 A_2 = 0$$

2 Theoretische Grundlagen

und

$$\omega_0^2 A_1 + (\omega^2 - 2\omega_0^2) A_2 = 0.$$

Löst man dieses Gleichungssystem, erhält man die Eigenfrequenzen $\omega = \omega_0$ (die beiden Massen bewegen sich gleichphasig) und $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ (die Massen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung).

Es ergeben sich also zwei mögliche Moden, die abhängig von der Anregungsform mehr oder weniger stark auftreten. Die Schwingung des Systems ist in der Praxis immer eine Überlagerung beider Moden, es sei denn, eine bestimmte Mode wird gezielt angeregt. Dies bedeutet, dass jede mögliche Anordnung der Massen zu einem beliebigen Zeitpunkt als Linearkombination der Moden ausgedrückt werden kann.

Die Abbildung 2.2(b) zeigt ein System, bei dem eine Bewegung jeder Masse sowohl in x- als auch in y-Richtung zulässig ist. Daraus erschließt sich, dass vier verschiedene Moden auftreten können: zwei transversale Moden (Bewegung in y-Richtung) und zwei longitudinale Moden (Bewegung in x-Richtung).

Anzumerken ist, dass longitudinale Moden für die Schallabstrahlung eigentlich bedeutungslos sind. Zum besseren Verständnis der Modenbildung werden sie jedoch an dieser Stelle trotzdem behandelt.

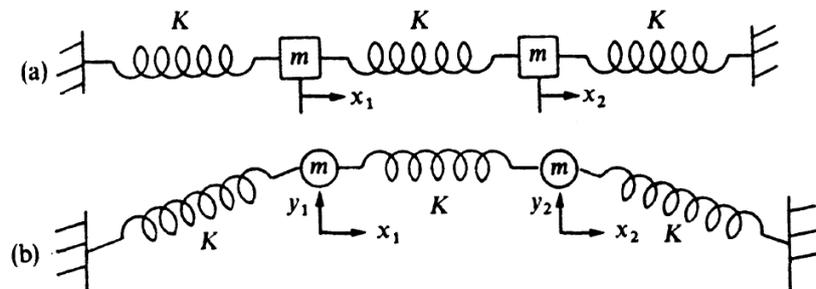


Abbildung 2.2: Zweimassensystem. (a) Die Bewegung der Massen ist auf die x-Achse beschränkt. (b) Bewegung ist sowohl in x- als auch in y-Richtung möglich. [5](S. 25)

2.3 Eindimensionale kontinuierliche Systeme - Saiten, Stäbe

In diesem Kapitel wird ein Übergang von diskreten Massen und Federn zu einer kontinuierlichen Verteilung dieser Elemente im System versucht. Am einfachsten kann man dies am Beispiel der schwingenden Saite zeigen, weshalb diese im Folgenden etwas näher betrachtet wird.

2.3.1 Schwingende Saite

Im letzten Kapitel wurde erläutert, dass ein System mit zwei Massen zwei longitudinale bzw. zwei transversale Moden besitzt. Das 3-Massen-System in Abbildung 2.3 kann drei longitudinale und drei transversale Moden ausbilden, wobei jeweils die Mode die tiefste Frequenz hat, bei welcher sich alle Massen in die gleiche Richtung bewegen. Ausserdem ist eine Transversalmode immer tieffrequenter als die zugehörige Longitudinalmode.

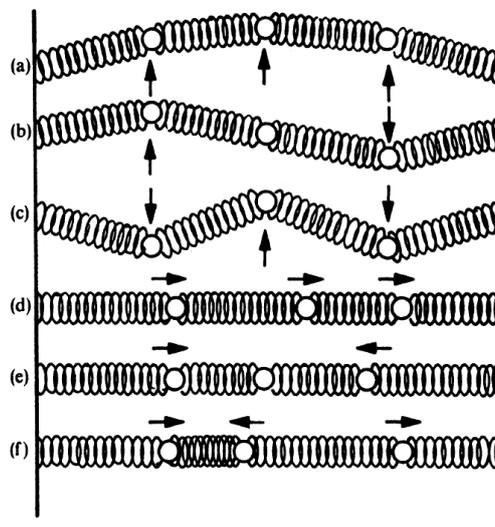


Abbildung 2.3: Moden eines 3-Massen-Oszillators. (a)-(c) Transversalmoden, (d)-(f) Longitudinalmoden [5](S. 34)

2 Theoretische Grundlagen

Erhöht man nun die Anzahl an Massen, steigt auch die Anzahl der Moden. Für jede neue Masse kommt eine Mode dazu, d.h. ein N-Massen-System hat N Transversal- und N Longitudinalmoden. Erstere sind in Abbildung 2.4 dargestellt.

Man kann erkennen, dass sich das System mit zunehmender Anzahl an Massen immer mehr einer schwingenden Saite annähert.

Es wäre also möglich eine schwingende Saite zu modellieren, indem man für jede Masse die Bewegungsgleichung anschreibt und N gegen unendlich gehen lässt. Einfacher ist es jedoch, die Saite mit folgenden Parametern als Ganzes zu betrachten: Massenbelag μ (in kg/m), Vorspannung T (in N) und Länge L (in m).

Unter der Annahme einer homogenen Saite, welche keine Biegesteifigkeit besitzt, wird das Problem durch die Wellengleichung nach D'Alembert (ohne Herleitung)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

mit $c^2 = T/\mu$ beschrieben.

Demnach ist also die Beschleunigung proportional zur Krümmung der Saite. Die Transversalwellenausbreitung erfolgt mit der Geschwindigkeit c .

Gelöst wird diese Differentialgleichung mit den Randbedingungen $y(0, t) = 0$ und $y(L, t) = 0$ (d.h. die Saite ist an ihren Enden in Ruhe) und man erhält die allgemeine Lösung der schwingenden Saite

$$y = \sum_n C_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin k_n x \quad (2.5)$$

als Summe aller Moden, wobei $\omega_n = n\pi c/L$ und $k_n = \omega_n/c$ gilt.

C_n und ϕ_n sind von den Anfangsbedingungen, d.h. der Anregung der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$, abhängig.

2 Theoretische Grundlagen

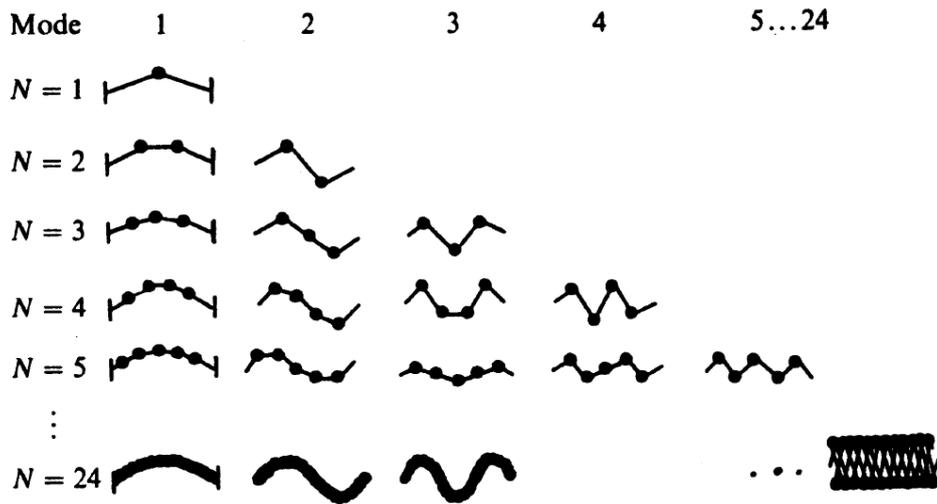


Abbildung 2.4: Transversalmoden eines Masse-Feder-Systems mit zunehmender Anzahl an Massen [5](S. 34)

2.3.2 Schwingender Stab

In einem Stab sind folgende Wellenausbreitungen möglich: Longitudinal-, Transversal- und Torsionswellen. Nachfolgend werden nur Transversalwellen behandelt, da hauptsächlich diese für die Schallabstrahlung verantwortlich sind.

Im Unterschied zu einer (idealen) Saite braucht der Stab keine Vorspannkraft, weil dieser selbst eine Steifigkeit besitzt und so für die notwendige Rückstellkraft sorgt.

Wie schon bei der Betrachtung der Saite, beschreibt auch hier eine partielle DGL den Zusammenhang zwischen zeitlicher und räumlicher Änderung der Auslenkung (ohne Herleitung):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EK^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (2.6)$$

Kenngrößen des Stabes sind das Elastizitätsmodul E (in N/m^2), die Dichte ρ , der Trägheitsradius K und die Länge L . K ist abhängig von der Querschnittsfläche und beträgt zum Beispiel für einen runden Stab $K = r/2$.

2 Theoretische Grundlagen

Die Lösung der Wellengleichung ist (wieder ohne Herleitung):

$$y = \cos(\omega t + \phi) \left[A \cosh \frac{\omega x}{v} + B \sinh \frac{\omega x}{v} + C \cos \frac{\omega x}{v} + D \sin \frac{\omega x}{v} \right] \quad (2.7)$$

Anders als bei einer schwingenden Saite, bei der nur eine feste Einspannung an den Enden sinnvoll ist, kommen bei Stäben verschiedene Randbedingungen in Frage, welche in [Abbildung 2.5](#) dargestellt werden. Abhängig von diesen können nur bestimmte Kreisfrequenzen ω auftreten, die Lösung ist nur für bestimmte Werte von ω gültig.

Für den Fall, dass beide Enden frei sind (der Stab schwebt in der Luft), muss z.B. gelten [5]:

$$\omega_n = \frac{\pi^2 K}{4L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} [3.011^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n + 1)^2] \quad (2.8)$$

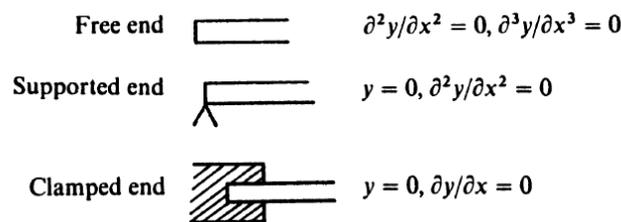


Abbildung 2.5: Verschiedene Randbedingungen eines Stabes [5](S. 57)

2.4 Zweidimensionale kontinuierliche Systeme - Membranen, Platten

Nachdem im letzten Kapitel eindimensionale Systeme betrachtet worden sind, beschäftigt sich dieses mit den zweidimensionalen Pendanten dieser Modelle.

Aus Gründen der Einfachheit, wird im Folgenden nur die (in der Praxis eigentlich weniger interessante) rechteckige Membran behandelt. Ebenso werden bei der Platte nur rechteckige Ausführungen thematisiert.

2.4.1 Schwingende Membran

Wie die schwingende Saite braucht auch die (ideale) Membran eine externe Vorspannung, da sie keine Steifigkeit besitzt und somit nicht selbst für die notwendige Rückstellkraft sorgen kann.

Das Verhalten des Systems, betrachtet man nur Transversalwellen, wird wieder durch eine Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

T ist hierbei die Oberflächenspannung und σ der Massenbelag. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$z_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} (M \sin \omega t + N \cos \omega t) \quad (2.10)$$

und die zugehörigen Frequenzen sind

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}. \quad (2.11)$$

Anzumerken ist, dass stehende Wellen in x -Richtung unabhängig derer in y -Richtung sind und umgekehrt.

2.4.2 Schwingende Platte

Die schwingende Platte ist nur aus Vollständigkeitsgründen hier aufgeführt, diese wird im Detail in Kapitel 3 besprochen.

2.5 Dämpfung am Beispiel der schwingenden Saite

Bisher wurden nur ideale Systeme betrachtet, d.h. einmal angeregt, oszillieren diese unendlich lange weiter. In der Realität treten jedoch Reibungsverluste auf, welche dazu führen, dass die Schwingung abklingt.

Im folgenden Kapitel wird der Einfluss der Dämpfung am Beispiel einer Saite demonstriert.

Die gesamte Dämpfung, welche eine schwingende Saite erfährt, setzt sich aus drei verschiedenen Mechanismen zusammen: Luftdämpfung, innere Dämpfung und Energieverlust durch die Aufhängung.

2.5.1 Luftdämpfung

Das Problem der Reibungsdämpfung in einem Medium wurde schon vor langer Zeit von Stokes gelöst. Er zeigte, dass die Kraft, welche die Saite verzögert, aus zwei Komponenten besteht: einer Last, die sich wie eine zusätzliche Masse verhält (dadurch werden auch die Eigenfrequenzen ein wenig verringert) und einer Komponente, die ein exponentielles Abklingen der Amplitude verursacht.

Die auf eine zylinderförmige Saite mit Länge L und Radius r wirkende verzögernde Kraft ist

$$F_r = 2\pi^2 \rho_a f v r^2 L \left(\frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad (2.12)$$

mit

$$M = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{2\pi f}{\eta_a}}. \quad (2.13)$$

v ... Geschwindigkeit der Saite

f ... Frequenz

ρ_a ... Dichte der Luft

η_a ... kinematische Viskosität der Luft

2 Theoretische Grundlagen

Die Amplitude klingt exponentiell ab, mit der Zeitkonstante

$$\tau_1 = \frac{\rho}{2\pi\rho_a f} \frac{2M^2}{2\sqrt{2M+1}}. \quad (2.14)$$

2.5.2 Innere Dämpfung

Nach mehreren Überlegungen kommt man zu der Erkenntnis, dass die Angabe eines einzelnen Elastizitätsmoduls E für die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung eines realen Materials zu wenig ist. Vielmehr passiert die Dehnung in zwei Schritten: Wird ein Körper mit Spannung beaufschlagt, findet eine sofortige Dehnung statt. Über eine gewisse Zeit τ wächst diese jedoch weiter.

Um dieses Verhalten zu berücksichtigen, wird der Elastizitätsmodul durch eine komplexe Zahl dargestellt:

$$E = E_1 + jE_2. \quad (2.15)$$

Setzt man obige Gleichung in die Bewegungsgleichung ein, erhält man die Abklingzeit

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi f} \frac{E_1}{E_2}. \quad (2.16)$$

Daraus wird ersichtlich, dass innere Dämpfung nur materialabhängig bzw. von Radius, Länge und Vorspannung der Saite unabhängig ist.

Für reine Metallsaiten ist die innere Dämpfung jedoch vernachlässigbar klein.

2.5.3 Energieverlust durch die Aufhängung

Für die Betrachtung des Energietransports von der Saite zur (beweglichen) Aufhängung eignet sich am besten die Admittanz (Schnelle durch Kraft), deren Realteil die Konduktanz G ist.

Die Energieabnahme ist wieder exponentiell, mit einer Zeitkonstante

$$\tau_3 = \frac{1}{8\mu L f^2 G}. \quad (2.17)$$

2 Theoretische Grundlagen

Berücksichtigt man nun alle drei Dämpfungsmechanismen, lässt sich eine Zeitkonstante τ durch Addition der Kehrwerte bestimmen:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}. \quad (2.18)$$

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

3.1 Ablauf der Synthese

Ein Modell zur Beschreibung eines schwingenden Körpers besteht in der Regel aus zwei wichtigen Informationen: 1) einer partiellen DGL samt Randbedingungen und 2) Informationen über die Anregung, d.h. Anfangsbedingungen und eine Anregungsfunktion bzw. die Position der Anregung. [3]

Aus Gründen der Einfachheit, wird in dieser Arbeit von der Annahme ausgegangen, dass die Platte in eine unendliche Schallwand eingebaut ist, d.h. es wird nur von einer Seite Schall abgestrahlt. Wäre dies nicht der Fall, käme es zum akustischen Kurzschluss (Auslöschung von tiefen Frequenzen).

Abbildung 3.1 zeigt den Ablauf der Synthese. Eine komplexe Schwingungsform kann durch Addition und richtige Gewichtung der einzelnen Moden dargestellt werden.

Zuerst müssen die Modenformen und die zugehörigen Eigenfrequenzen bestimmt werden. Dies geschieht durch Lösung der Wellengleichung (partielle DGL) unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Die Eigenfrequenzen und deren jeweilige Modenform werden in Matrizen gespeichert.

Als nächstes werden die Gewichtungskoeffizienten der einzelnen Sinusschwingungen berechnet. Dazu wird jede Modenform mit der Anregungsfunktion multipliziert und anschließend darüber integriert. Dadurch erhält man die Energie und die Phase (0° oder 180°) mit der jede Mode angeregt wird.

Nun muss noch die frequenzabhängige Dämpfung jeder Sinusschwingung

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

bestimmt werden. Dies geschieht durch Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$, wobei α material- und frequenzabhängig ist.

Abschließend werden alle Sinusschwingungen addiert und man erhält den fertig synthetisierten Klang. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Moden für $\alpha > \omega_0$ überhaupt nicht mehr schwingen. Man spricht dann vom sogenannten „Kriechfall“. Dieser wird in Kapitel 3.6 noch genauer beleuchtet.

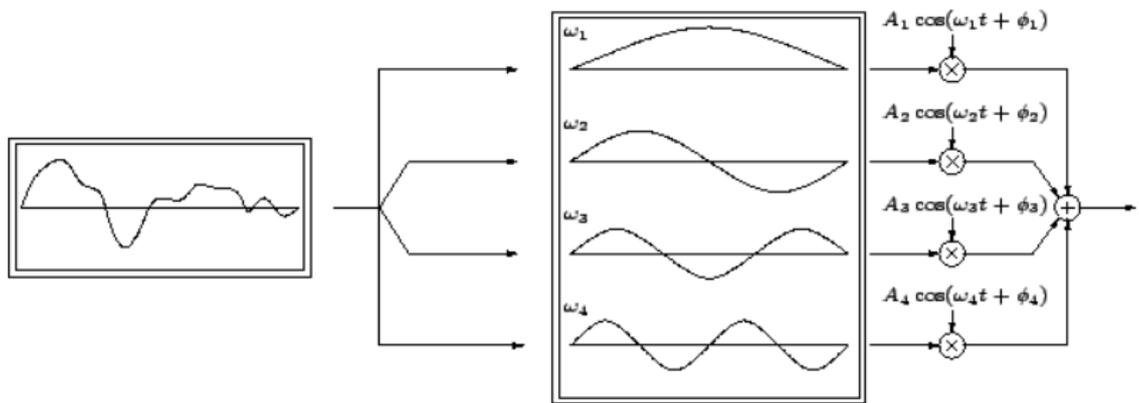


Abbildung 3.1: Grundmodell der Modalsynthese [3]

Nachfolgend wird nun detaillierter auf die einzelnen notwendigen Schritte eingegangen.

Für die Berechnung der Eigenfrequenzen und der Modenformen wurde ausschließlich das Paper „The Vibration of Rectangular Plates“ von G. B. Warburton verwendet. [11] Dieses berücksichtigt 15 verschiedene Randbedingungen (Einspannmöglichkeiten der Platte).

3.2 Berechnung der Modenformen

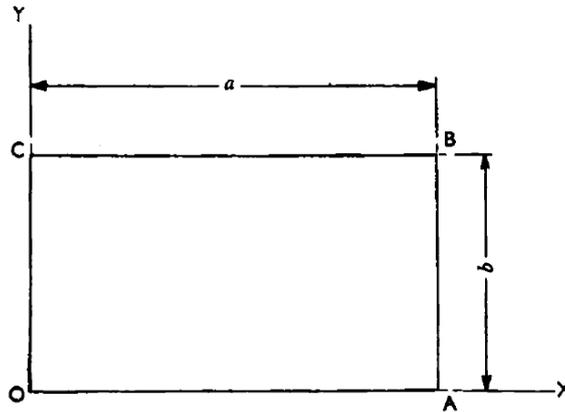


Abbildung 3.2: Abmessungen einer rechteckigen Platte [11]

Wie schon erwähnt, muss zur Berechnung der Modenformen die Wellengleichung einer rechteckigen Platte (siehe Abbildung 3.2) gelöst werden.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{Egh^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

- E ... Elastizitätsmodul
- g ... Erdbeschleunigung
- h ... Dicke der Platte
- ρ ... Dichte
- σ ... Poissonzahl

w ist die Auslenkung an irgendeinem Punkt (x,y) zur Zeit t :

$$w = W \sin \omega t = A\theta(x)\phi(y) \sin \omega t \quad (3.2)$$

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine Funktion für w zu finden, welche obige partielle DGL zusammen mit den Randbedingungen erfüllt. Daher wird eine unendliche Reihe für W angenommen, wobei jeder Term der Reihe die Wellengleichung und bestimmte Randbedingungen erfüllt. Durch Verwendung der sogenannten Rayleigh-Methode, auf die hier nicht

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

genauer eingegangen wird, erhält man die charakteristischen Funktionen $\theta(x)$ und $\phi(y)$ abhängig von den Randbedingungen. Dabei ist anzumerken, dass x- und y-Richtung vollkommen unabhängig voneinander sind.

Der Abbildung 3.9 kann entnommen werden, dass zur Darstellung aller 15 möglichen Randbedingungen 6 charakteristische Funktionen jeweils in x- und y-Richtung nötig sind. Diese wären:

1. Freely-supported bei $x = 0$ und $x = a$
2. Fixed bei $x = 0$ und $x = a$
3. Free bei $x = 0$ und $x = a$
4. Fixed bei $x = 0$, free bei $x = a$
5. Fixed bei $x = 0$, freely-supported bei $x = a$
6. Free bei $x = 0$, freely-supported bei $x = a$

Um die Funktionen für die y-Richtung $\phi(y)$ zu erhalten, müssen lediglich x , a , γ und k durch y , b , ϵ und c ersetzt werden.

Der Index m gibt die Modenummer an, welche der Anzahl an Knotenlinien in einer Richtung entspricht, d.h. $m = 3$ bedeutet drei Knotenlinien. Zu beachten ist, dass auch die Kanten mitgezählt werden, falls diese in Ruhe sind (fixed und freely-supported). Dies bedeutet zum Beispiel, dass m für den Fall 1 nicht kleiner als 2 werden kann.

Nachfolgend sind für die Fälle 1 und 2 die mathematischen Ausdrücke und die Graphen angegeben. Für die Fälle 3 bis 6 sind die Funktionen nur graphisch abgebildet. Bei Interesse können die restlichen Formeln aus dem Paper von Warburton entnommen werden.

In den Plots geht die x-Achse jeweils von 0 bis 250. Dies hängt mit der Implementierung in Octave zusammen, wo ich als örtliche Auflösung der Platte in eine Richtung den Wert 250 gewählt habe. $x = 250$ entspricht daher $x = a$.

1. Freely-supported bei $x = 0$ und $x = a$:

$$\theta(x) = \sin \frac{(m-1)\pi x}{a} \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (3.3)$$

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

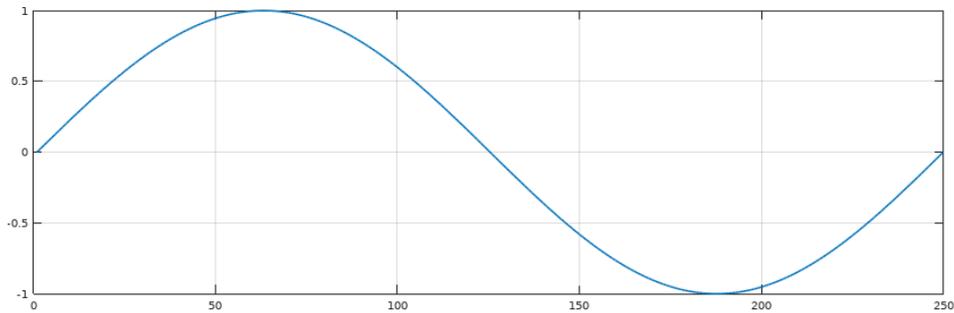


Abbildung 3.3: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 1 ($m=3$)

2. Fixed bei $x = 0$ und $x = a$:

$$\theta(x) = \cos \gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + k \cosh \gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (3.4)$$

wobei $k = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sinh \frac{1}{2}\gamma}$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma + \tanh \frac{1}{2}\gamma = 0$.

$$\theta(x) = \sin \gamma' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + k' \sinh \gamma' \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad m = 3, 5, 7, \dots \quad (3.5)$$

wobei $k' = -\frac{\sin \frac{1}{2}\gamma'}{\sinh \frac{1}{2}\gamma'}$ und $\tan \frac{1}{2}\gamma' - \tanh \frac{1}{2}\gamma' = 0$.

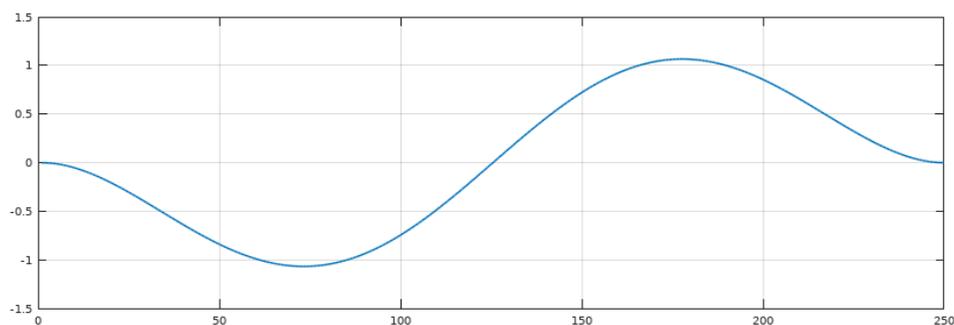


Abbildung 3.4: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 2 ($m=3$)

3. Free bei $x = 0$ und $x = a$

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

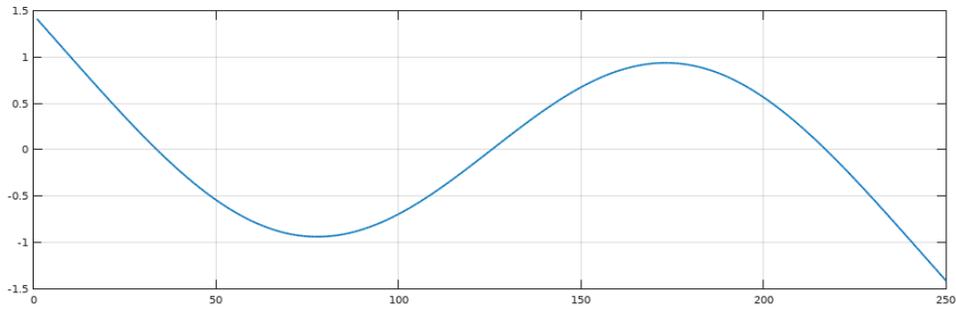


Abbildung 3.5: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 3 ($m=3$)

4. Fixed bei $x = 0$, free bei $x = a$

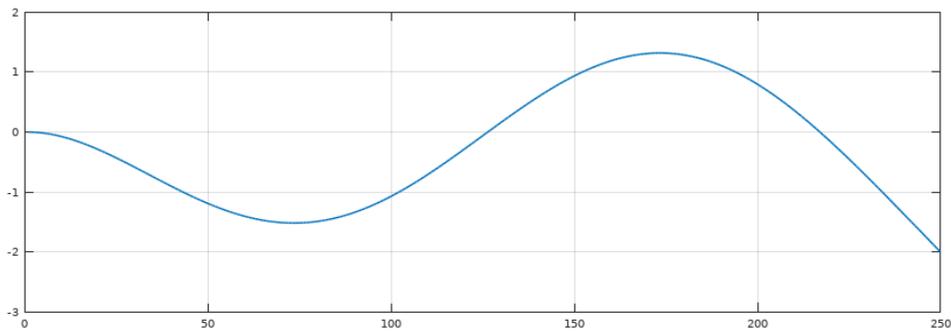


Abbildung 3.6: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 4 ($m=3$)

5. Fixed bei $x = 0$, freely-supported bei $x = a$

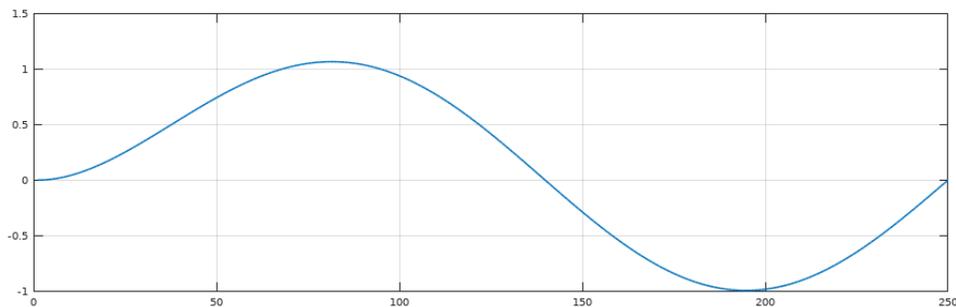


Abbildung 3.7: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 5 ($m=3$)

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

6. Free bei $x = 0$, freely-supported bei $x = a$

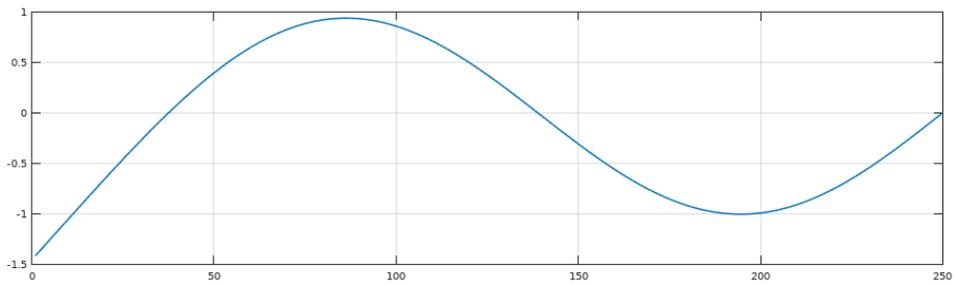


Abbildung 3.8: Charakteristische Funktion $\theta(x)$ für Fall 6 ($m=3$)

Im Anhang befinden sich beispielhaft die 3-dimensionalen Plots der Modenformen für einige ausgewählte Randbedingungen.

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

THE VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES

TABLE 1. COEFFICIENTS IN FREQUENCY EQUATION (16)

Boundary condition	m	----- Freely-supported edge.			////////// Fixed edge.			Free edge.	Modes $m/n \pm n/m$ exist for $a = b$ if,
		G_x	H_x	J_x	n	G_y	H_y		
1	2, 3, 4, ...	m-1	(m-1) ²	(m-1) ²	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
2	2 3, 4, 5, ...	1-506 m-1	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	2 3, 4, 5, ...	1-506 n-1	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	$m-n = \pm 2, 4, 6, \dots$
3	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1-506 m-1	0 0 1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0 12/n ² 5-017 $(m-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(m-1)^2}\right]$	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1-506 n-1	0 0 1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	0 12/n ² 5-017 $(n-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(n-1)^2}\right]$	$m-n = \pm 2, 4, 6, \dots$
4	2, 3, 4, ...	m-1	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	2 3, 4, 5, ...	1-506 n-1	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	None
5	2, 3, 4, ...	m-1	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	2, 3, 4, ...	n-1	$(n-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right]$	$(n-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right]$	$m \neq n$
6	2 3, 4, 5, ...	1-506 m-1	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
7	2, 3, 4, ...	m-1	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	$(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
8	1 2, 3, 4, ...	0 m-1	0 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	3/n ² $(m-1)^2 \left[1 + \frac{3}{(m-1)^2}\right]$	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1-506 n-1	0 0 1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	0 12/n ² 5-017 $(n-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(n-1)^2}\right]$	None
9	1 2, 3, 4, ...	0 m-1	0 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	3/n ² $(m-1)^2 \left[1 + \frac{3}{(m-1)^2}\right]$	1 2, 3, 4, ...	0 n-1	0 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right]$	3/n ² $(n-1)^2 \left[1 + \frac{3}{(n-1)^2}\right]$	$m \neq n$
10	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1-506 m-1	0 0 1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0 12/n ² 5-017 $(m-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(m-1)^2}\right]$	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
11	1 2, 3, 4, ...	0 m-1	0 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{1}{(m-1)^2}\right]$	3/n ² $(m-1)^2 \left[1 + \frac{3}{(m-1)^2}\right]$	2, 3, 4, ...	n-1	(n-1) ²	(n-1) ²	None
12	1 2 3, 4, 5, ...	0-597 1-494 m-1	-0-0870 1-347 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0-471 3-284 $(m-1)^2 \left[1 + \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	2 3, 4, 5, ...	1-506 n-1	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	None
13	1 2 3, 4, 5, ...	0-597 1-494 m-1	-0-0870 1-347 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0-471 3-284 $(m-1)^2 \left[1 + \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	1 2 3, 4, 5, ...	0-597 1-494 n-1	-0-0870 1-347 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	0-471 3-284 $(n-1)^2 \left[1 + \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	$m \neq n$
14	2 3, 4, 5, ...	1-506 m-1	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	1-248 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	2 3, 4, 5, ...	1-506 n-1	1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	1-248 $(n-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(n-1)^2}\right]$	None
15	1 2 3, 4, 5, ...	0-597 1-494 m-1	-0-0870 1-347 $(m-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0-471 3-284 $(m-1)^2 \left[1 + \frac{2}{(m-1)^2}\right]$	0 1 2 3, 4, 5, ...	0 0 1-506 n-1	0 0 1-248 $(n-1)^2 \left[1 - \frac{2}{(n-1)^2}\right]$	0 12/n ² 5-017 $(n-1)^2 \left[1 + \frac{6}{(n-1)^2}\right]$	None

Abbildung 3.9: Randbedingungen und zugehörige Koeffizienten zur Berechnung der Eigenfrequenzen [11]

3.3 Berechnung der Eigenfrequenzen

Nachdem die charakteristischen Funktionen $\theta(x)$ und $\phi(y)$ bestimmt wurden, kann für jede Mode die zugehörige Frequenz ermittelt werden. Für jeden Fall wird ein dimensionsloser Frequenzfaktor λ abgeleitet, welcher proportional zur Frequenz f ist.

$$\lambda^2 = \frac{\rho a^4 (2\pi f)^2 12(1 - \sigma^2)}{\pi^4 E h^2 g} \quad (3.6)$$

Warburton fand heraus, dass sich für alle möglichen Randbedingungen, bestehend aus "freely-supported, free und fixed" Kanten, λ durch folgenden Ausdruck berechnen lässt.

$$\lambda^2 = G_x^4 + G_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} [\sigma H_x H_y + (1 - \sigma) J_x J_y] \quad (3.7)$$

Die Koeffizienten G_x, H_x, J_x, G_y, H_y und J_y sind abhängig von den Randbedingungen. Aus der Tabelle in Abbildung 3.9 können diese entnommen werden.

Will man zum Beispiel λ für die Mode $m = 2, n = 3$ und Randbedingung (Boundary Condition) 4 berechnen, erhält man

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1,25^4 + 2,5^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} \left[\sigma \cdot 1,25^2 \left(1 - \frac{1}{1,25\pi} \right) \cdot 2,5^2 \left(1 - \frac{2}{2,5\pi} \right) + \right. \\ &\quad \left. (1 - \sigma) \cdot 1,25^2 \left(1 - \frac{1}{1,25\pi} \right) \cdot 2,5^2 \left(1 - \frac{2}{2,5\pi} \right) \right] = \\ &= 2,44 + 39,06 \frac{a^4}{b^4} + 10,85 \frac{a^2}{b^2}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Um nun auf die tatsächliche Frequenz f der Mode zu kommen, wird Gleichung 3.6 umgeformt.

$$f = \frac{\lambda h \pi}{a^2} \left[\frac{Eg}{48\rho(1 - \sigma^2)} \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

Abbildung 3.10 zeigt beispielhaft die ersten 100 Moden einer rechteckigen Platte aus Stahl. Um durch die Synthese einen Klang zu erhalten, der ungefähr dem Klang einer echten Platte entspricht, müssen jedoch noch viel

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

mehr Moden berechnet werden, im Idealfall bis ca. 20 kHz. Eigenfrequenzen, die darüber liegen, können bekanntlich über das Gehör nicht mehr wahrgenommen werden. Außerdem ist für hohe Frequenzen die Dämpfung so hoch, dass diese ohnehin nur für den Anschlag eine Rolle spielen. Noch dazu kommt, dass so hochfrequente Moden eigentlich nicht angeregt werden, da auch ein Schlägel - abhängig von dessen Härte und Durchmesser - eine Tiefpasswirkung hat. In der Praxis kann daher bei spätestens 16 kHz abgebrochen werden.

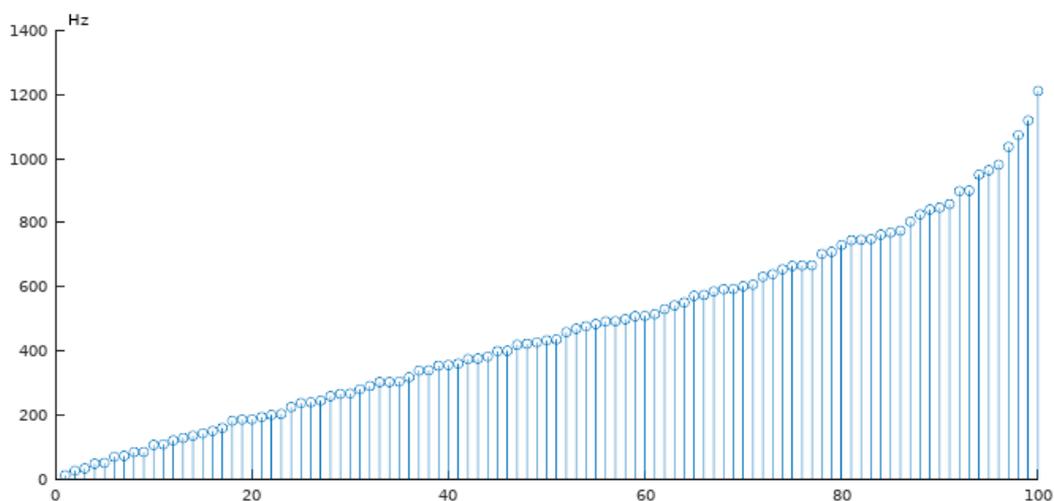


Abbildung 3.10: Frequenzen der ersten 100 Moden einer Stahlplatte (770mm x 630mm x 4mm) bei Randbedingung 1

3.4 Anregung der Platte

Die Anregung der Platte erfolgt an einer beliebigen Stelle durch einen Schlägel mit den Parametern Radius r , Weichheit w des Schlägelkopfes und Anschlaggeschwindigkeit v .

Die Weichheit ist keine echte physikalische Größe, sie wurde nur definiert, um das Modell möglichst einfach zu halten. Eine Weichheit von $w = 1$ bedeutet, dass der Schlägelkopf beim Aufprall bis zum Kugelmittelpunkt

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

zusammengedrückt wird. $w = 0$ heißt, der Schlägel wird nicht verformt und die Anregung entspricht einem Dirac-Impuls (siehe weiter unten).

Da der Schlägel also nicht unendlich hart ist und daher beim Aufprall auf der Platte komprimiert bzw. verformt wird, entspricht die Verteilung der Kraft auf der Platte ungefähr einem 2-dimensionalen Hann-Window (siehe Abbildung 3.11).

Diese Erkenntnis stammt aus einem Paper von Antoine Chaigne über die Modellierung von Xylophonstäben. [4] Er maß unter anderem die Kraft, die beim Auftreffen des Schlägels entsteht. Man kann erkennen, dass diese Kraft in etwa die Form eines Hann-Fensters hat, sowohl örtlich als auch zeitlich.

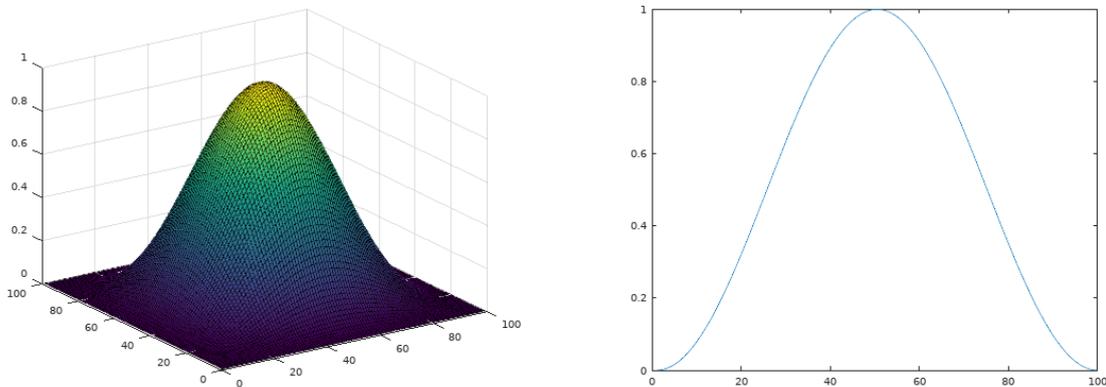


Abbildung 3.11: Links: 2-dimensionales Hann-Window; Rechts: Hann-Window in einer Dimension mit der Länge 100

Die Länge des Fensters entspricht der Kreissehne s (Abbildung 3.12), d.h. der maximalen Auflagefläche bzw. -linie des Schlägelkopfes ($v = 0$). s ist dabei abhängig vom Radius r und der Segmenthöhe h , wobei h wiederum von der Weichheit w des Schlägels abhängt.

$$s = 2\sqrt{2rh - h^2} \quad (3.10)$$

$h = w \cdot r$ und $w \in [0, 1]$.

$w = 0$... sehr hart

$w = 1$... sehr weich

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

Also je größer w ist, umso größer ist h und dadurch auch s . Damit wird die Anregung breiter.

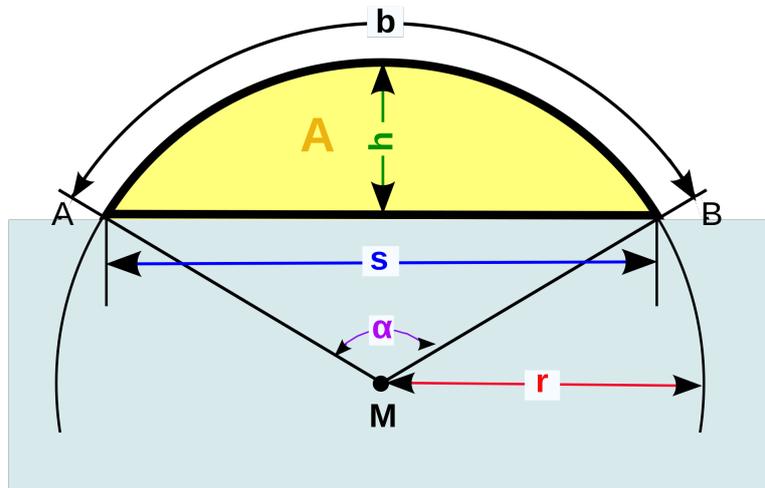


Abbildung 3.12: Größen eines Kreissegments [12]

Die Anregungsfunktion wird folgendermaßen realisiert:

Die Platte wird in $N \times N$ Segmente unterteilt und man wählt den gewünschten Anschlagpunkt. An dieser Stelle wird ein Impuls der Höhe 1 platziert. Der Impuls muss anschließend mit dem zuvor berechneten Hanning-Window in x- und y-Richtung gefaltet werden.

Bei genauerer Betrachtung des Anregungsvorgangs erkennt man, dass die vom Schlägelkopf auf die Platte ausgeübte Kraft auch zeitlich ungefähr einem Hanning-Window entspricht.

Dieses Phänomen wird durch die Faltung des Ausgangssignals mit einem Hanning-Window berücksichtigt und wirkt wie ein Tiefpassfilter.

Die Länge l des Fensters ergibt sich aus der Geschwindigkeit v des Schlägels bzw. der Zeit t , die zwischen dem Auftreffen des Schlägels auf der Platte und dem Verlassen dieser vergeht.

$$l = t \cdot f_s \qquad t = \frac{2h}{v} \qquad (3.11)$$

3.5 Gewichtung der einzelnen Moden

Um zu bestimmen, wie viel Energie durch den Anschlag in die jeweiligen Moden eingebracht wird, müssen die Gewichtungskoeffizienten berechnet werden. Diese sind abhängig von der Art und vom Ort der Anregung. Die Berechnung erfolgt durch Multiplikation der jeweiligen Modenform mit der Anregungsfunktion und anschließender Integration über das Ergebnis. Dieser Vorgang ist in Abbildung 3.13 am Beispiel der Mode (2,2) dargestellt.

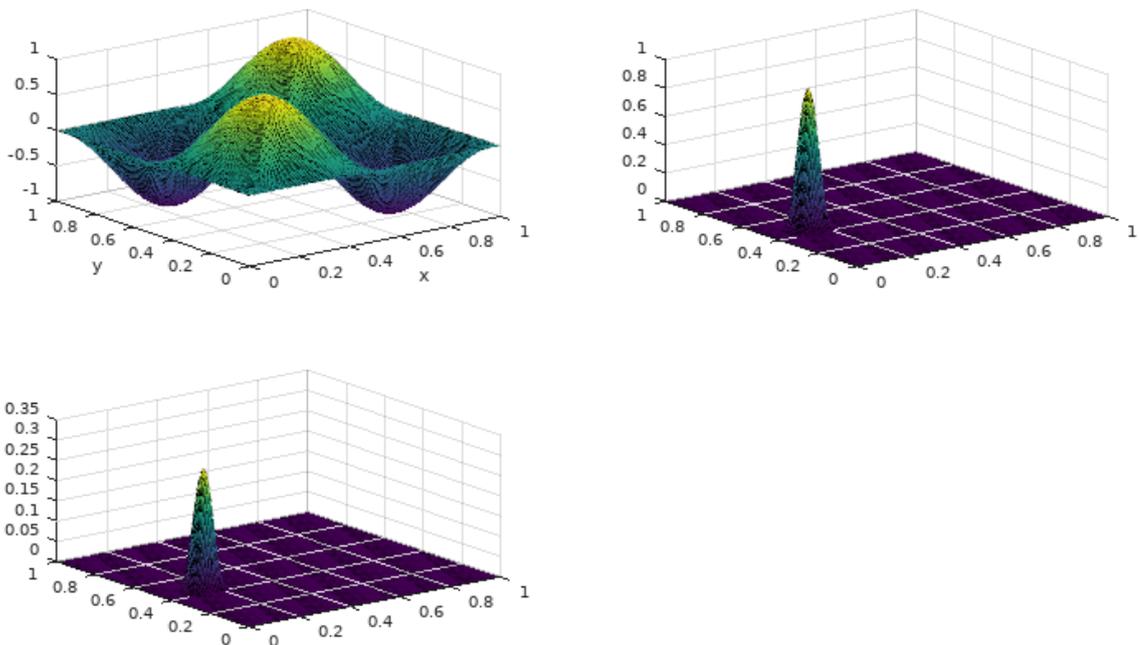


Abbildung 3.13: Oben: Modenform (Mode 2,2) und Anregungsfunktion; Unten: Multiplikation der beiden Funktionen

Für jede Mode wird nun ein Gewichtungskoeffizient berechnet (Abbildung 3.14). Dabei ist zu beachten, dass die 225 Moden ($N=15$) folgendermaßen geordnet sind: Mode(1,1) bis Mode(N,1), Mode(1,2) bis Mode(N,2), ..., Mode(1,N) bis Mode(N,N).

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

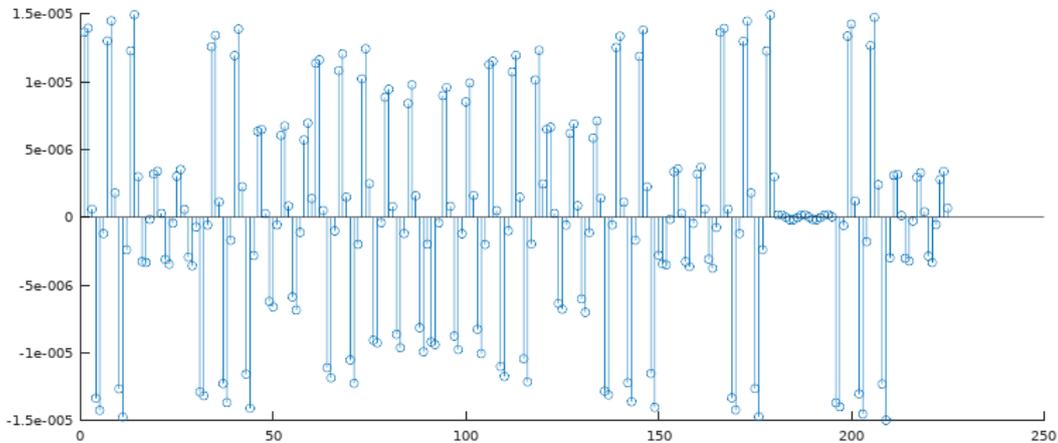


Abbildung 3.14: Gewichtungskoeffizienten für die ersten 225 Moden einer Stahlplatte, Anregung durch harten Schlägel

In Abbildung 3.15 sind die Spektrogramme einer schwingenden Stahlplatte (1100 x 850 x 3 mm, Randbedingung 3) abgebildet, welche am Rand mit einem harten bzw. einem weichen Schlägel angeregt wurde. Der Anschlagpunkt liegt bei 15% in x- und 20% in y-Richtung.

Deutlich erkennbar ist, dass die höheren Moden bei Anregung mit dem weichen Schlägel viel weniger ausgeprägt sind bzw. überhaupt nicht angeregt werden. Durch die Normalisierung des Ausgangssignals sind die niedrigen Moden jedoch stärker als bei Anregung mit einem harten Schlägel. Dies spiegelt die Realität sehr gut wider, weil ein weicherer Schlägel in der Praxis auch schwerer ist und dadurch mehr Energie in die Moden übertragen wird.

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

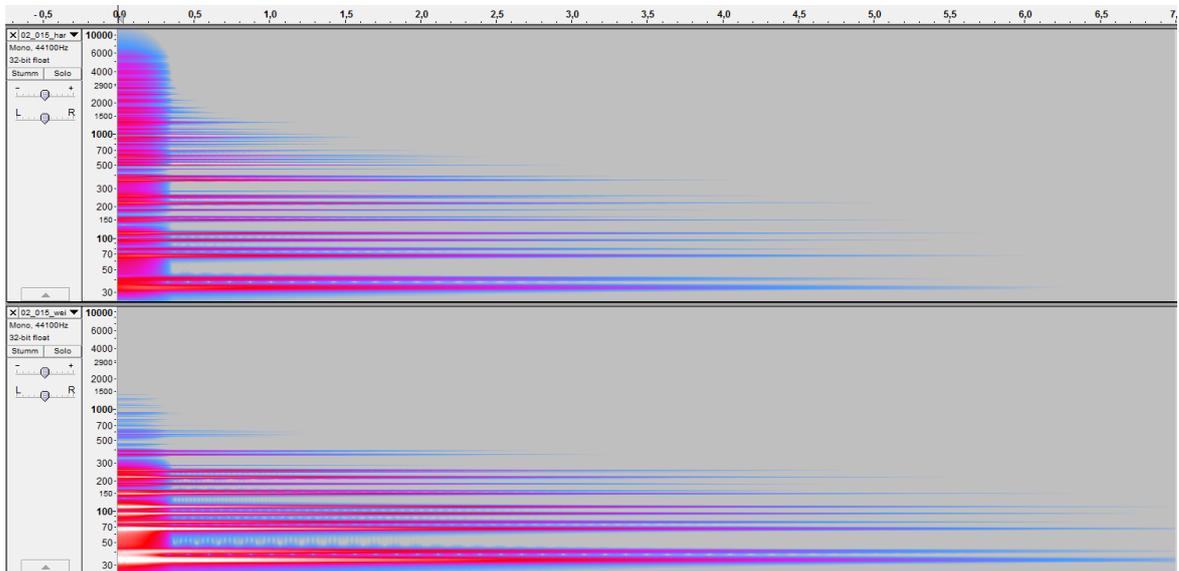


Abbildung 3.15: Spektrogramme einer Stahlplatte, Anregung am Rand. oben: harter Schlägel, unten: weicher Schlägel

Die Abbildung 3.16 zeigt ebenso den Unterschied zwischen einem harten und einem weichen Schlägel, jedoch liegt der Anschlagspunkt diesmal genau in der Mitte der Platte.

Dies hat zur Folge, dass alle Moden, welche einen Schwingungsknoten in der Mitte besitzen, nicht angeregt werden. Der Klang ist daher sehr „dünn“.

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

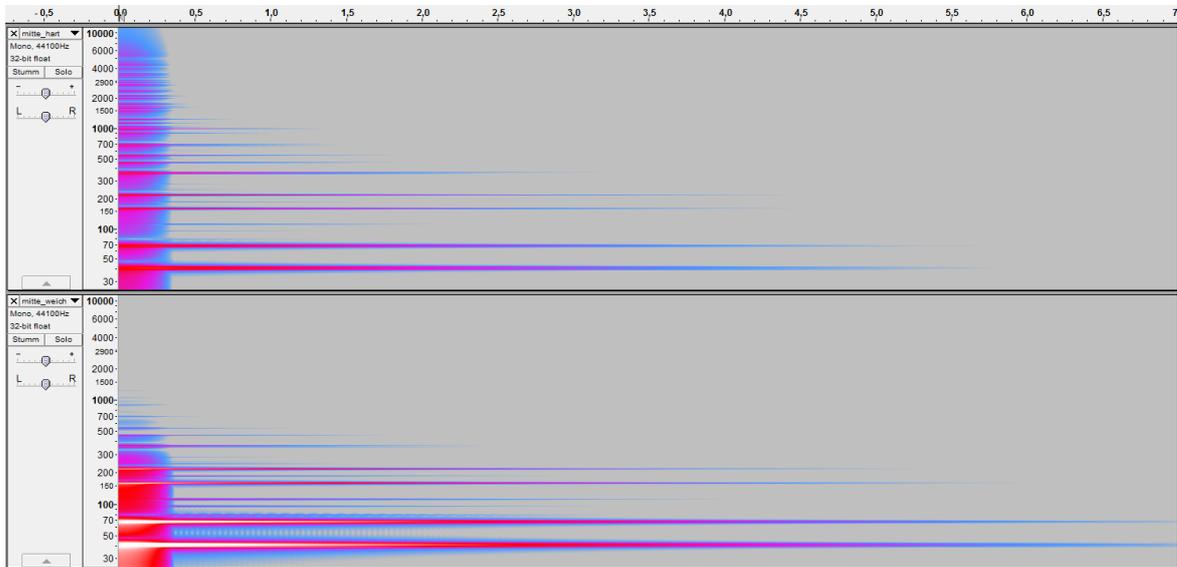


Abbildung 3.16: Spektrogramme einer Stahlplatte, Anregung in der Mitte. oben: harter Schlägel, unten: weicher Schlägel

3.6 Frequenzabhängige Dämpfung der Moden

Wie schon in Kapitel 2.5 für die schwingende Saite besprochen, gibt es auch bei der Betrachtung von Platten die gleichen Dämpfungsmechanismen, wobei im Zuge dieser Arbeit die Dämpfung als Ganzes betrachtet wird.

Jede Mode kann als ein gedämpfter harmonischer Oszillator betrachtet werden, bei dessen Lösung man in Abhängigkeit des Dämpfungsgrads ζ drei Fälle unterscheidet [2] (siehe auch Abbildung 3.17):

1. Schwingfall ($\zeta < 1$): Als Lösung erhält man eine sinusförmige Schwingung, welche exponentiell abklingt ... $x(t) = e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t)$. Außerdem verringern sich die Eigenfrequenzen leicht - um den Faktor $\sqrt{1 - \zeta^2}$. [8]
2. Kriechfall ($\zeta > 1$): Die Dämpfung ist so stark, dass keine Schwingung mehr möglich ist und das ausgelenkte Material „kriecht“ in die Ruhelage zurück ... $x(t) = e^{-\alpha t} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t)$.

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

3. Aperiodischer Grenzfall ($\zeta = 1$): Dieser beschreibt die kleinstmögliche Dämpfung bei der die Auslenkung ohne Überschwingen in die Ruhelage zurückkehrt ... $x(t) = Ate^{-\alpha t}$.

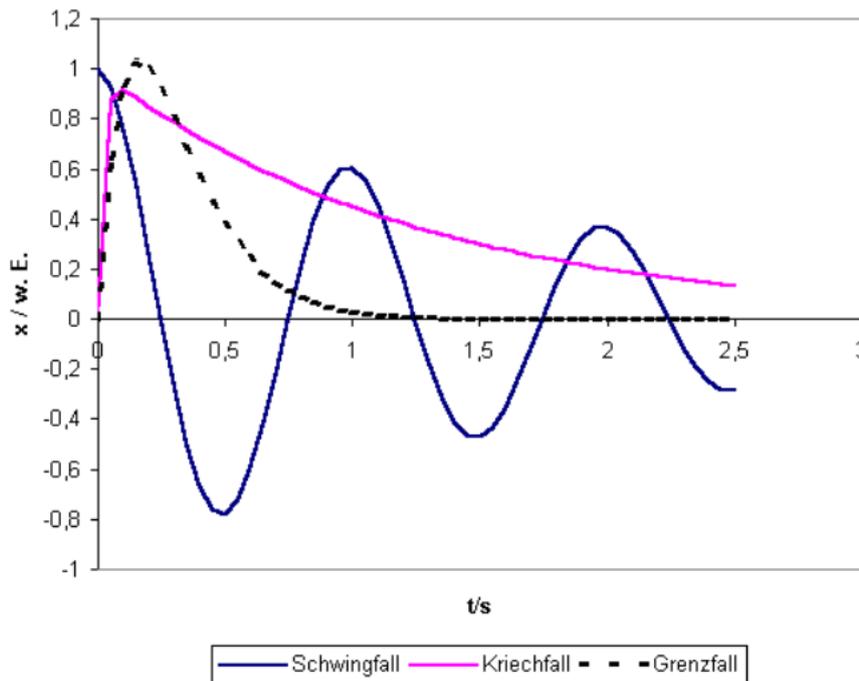


Abbildung 3.17: Gedämpfte harmonische Schwingung für verschiedene Dämpfungsgrade ζ [2]

ζ ist material- und auch frequenzabhängig, d.h. es muss für jede Mode einzeln bestimmt werden. Außerdem besteht ein proportionaler Zusammenhang zur Abklingkonstante α :

$$\zeta = \frac{1}{2Q} = \frac{\alpha}{\omega_0} \quad (3.12)$$

Den genauen Verlauf von ζ bzw. α zu bestimmen ist in Wirklichkeit aber schwierig, da viele Parameter Einfluss darauf haben.

Aus diesem Grund muss man sich einfachere mathematische Modelle konstruieren. Eines davon stammt von Mitsuko Aramaki. Sie untersuchte den

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

Zusammenhang zwischen wahrgenommenem Material und dem spektralen Abklingverhalten und definierte den Term [1]

$$\alpha(\omega) = e^{(\alpha_G + \alpha_R \omega)}. \quad (3.13)$$

Dabei sind α_G und α_R materialabhängige Konstanten. α_G beschreibt den frequenzunabhängigen und α_R den frequenzabhängigen Teil der Gesamtdämpfung.

Hörversuche zeigten, dass z.B. die Werte $\alpha_G = 0.6$ und $\alpha_R = 2 \times 10^{-4}$ am häufigsten mit Metall verbunden wurden. Aramaki hingegen untersuchte Alltagsgegenstände und keine Platten, d.h. nur weil gewisse Werte von der Mehrheit als metallisch empfunden wurden, können diese nicht einfach auf schwingende Platten übertragen werden. Bezugnehmend zu dieser Arbeit scheint eine geringere allgemeine Dämpfung ($\alpha_G \approx 0.3$) als angemessener. In Abbildung 3.18 ist erkennbar, wie stark α für hohe Frequenzen ansteigt.

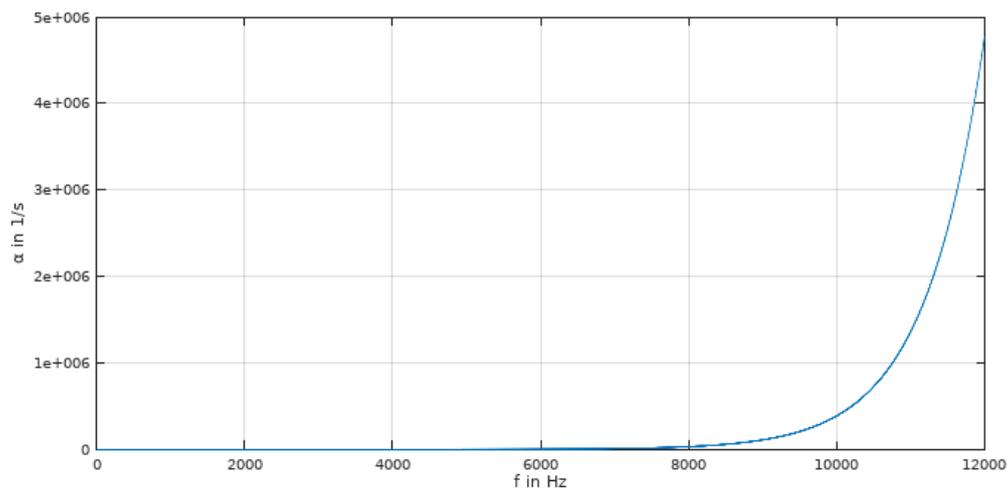


Abbildung 3.18: Verlauf von α für Metall (bis 12 kHz)

Im Folgenden befinden sich Plots der Zeitsignale einzelner Moden und des Gesamtsignals einer Stahlplatte mit den Abmessungen 1860 mm x 880 mm x 4 mm (Abbildungen 3.19 und 3.20).

In Abbildung 3.19 rechts unten ist das Zeitsignal der 250. Mode abgebildet.

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

Dieses schwingt nicht mehr, sondern „kriecht“ in die Ausgangslage zurück, da $\zeta > 1$.

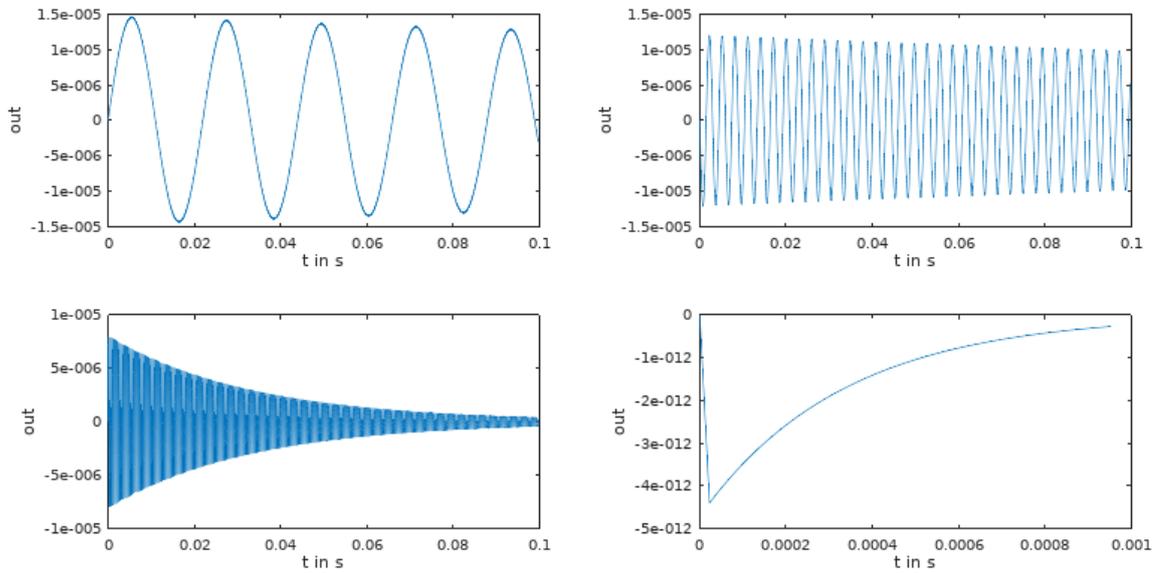


Abbildung 3.19: Ausschnitt aus dem Zeitsignal der 1., 10., 100., und 250. Mode einer Stahlplatte

3 Modalsynthese rechteckiger Platten

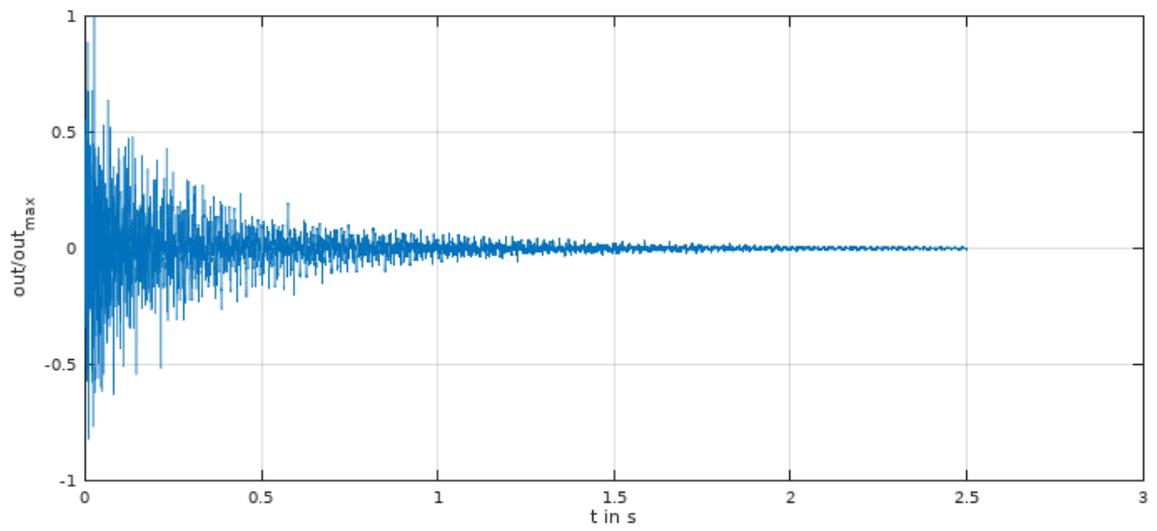


Abbildung 3.20: Ausgangssignal der Synthese

4 Evaluierung des Modells

Zur Überprüfung des implementierten Modells wurden Aufnahmen von Plattenglocken verwendet. [6] Dabei handelt es sich im Grunde um rechteckige Platten aus Aluminiumlegierung, Bronze oder Stahl, die an zwei Schnüren aufgehängt und mit einem Hammer angeregt werden (Abbildung 4.1). Der Hammerkopf ist mit einer Schicht aus Leder oder Filz gepolstert.



Abbildung 4.1: Beispielfoto Plattenglocken [7]

Der Klang dieser Plattenglocken ist dem von Kirchenglocken sehr ähnlich, daher werden sie oft im Orchester als Alternative zu Röhrenglocken verwendet.

Leider waren weder die genauen Abmessungen, noch das Material der gesampelten Platten bekannt. Auch die exakte Form der Anregung war

4 Evaluierung des Modells

nicht angegeben.

Das Seitenverhältnis aller Platten ist jedoch unabhängig von deren Größe ungefähr konstant und liegt zwischen 0,75 und 0,83.

Der Klang wird neben den Rand- und Anfangsbedingungen (Anregung) hauptsächlich vom Seitenverhältnis bestimmt. Alle anderen Parameter wie Dicke und die Materialeigenschaften bewirken nur eine Änderung der Tonhöhe, d.h. eine Verschiebung aller Eigenfrequenzen um einen Faktor.

Die Abmessungen wurden also einfach mit 1000 x 750 mm angenommen und die restlichen Werte wurden so lange verändert, bis die Tonhöhen der synthetisierten und der aufgenommenen Platte so gut wie möglich übereinstimmten.

Da Plattenglocken nur an dünnen Schnüren aufgehängt werden, wurde für das Modell Randbedingung 3 verwendet, was einer freien, in der Luft schwebenden Platte entspricht.

Danach wurden, wieder durch Vergleich mit der Aufnahme, die Parameter der Anregung festgelegt. Der Anschlagpunkt wurde genau in der Mitte der Platte gewählt. Anschlagsgeschwindigkeit, Durchmesser und Weichheit des Schlägels wurden angepasst, bis die größtmögliche Übereinstimmung mit dem Sample erreicht worden ist.

Zum Schluss wurden die Dämpfungsparameter eingestellt ($\alpha_G = -1,43$ und $\alpha_R = 2 * 10^{-4}$). Um den langen Ausschwingvorgang von Plattenglocken zu simulieren war ein sehr niedriges α_G notwendig.

Abbildung 4.2 zeigt die Spektrogramme des aufgenommenen und des synthetischen Klangs. Zu beachten ist die lange Dauer der Sounds von ca. 37 Sekunden.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 sind, sowohl für die Aufnahme als auch für die Synthese, die Spektren dargestellt. Hierfür wurde jeweils nur ein Ausschnitt des Signals (ohne den Anschlag) verwendet, um die Lage der einzelnen Eigenfrequenzen gut erkennbar zu machen.

4 Evaluierung des Modells

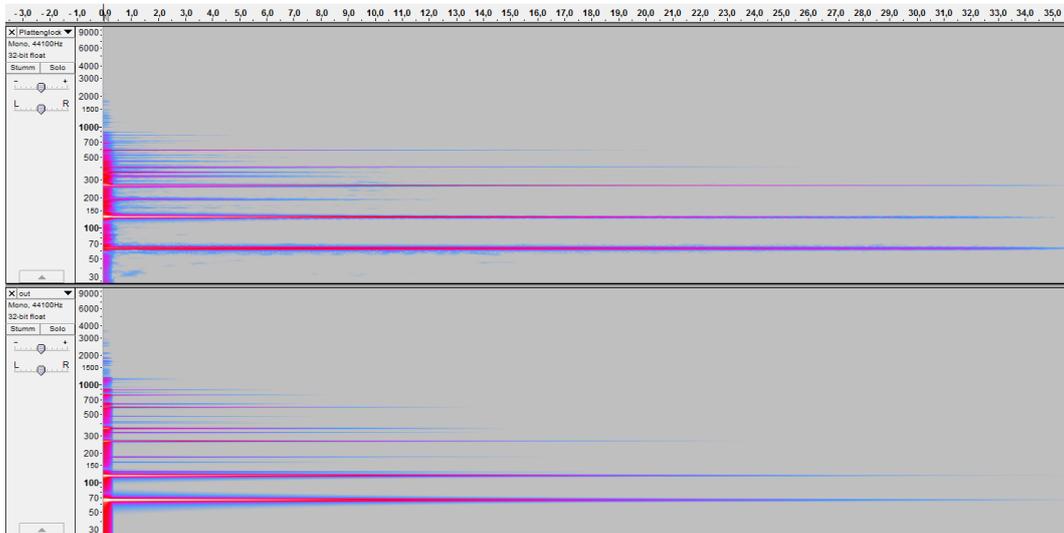


Abbildung 4.2: Spektrogramme der Aufnahme (oben) und des synthetisierten Klangs (unten)

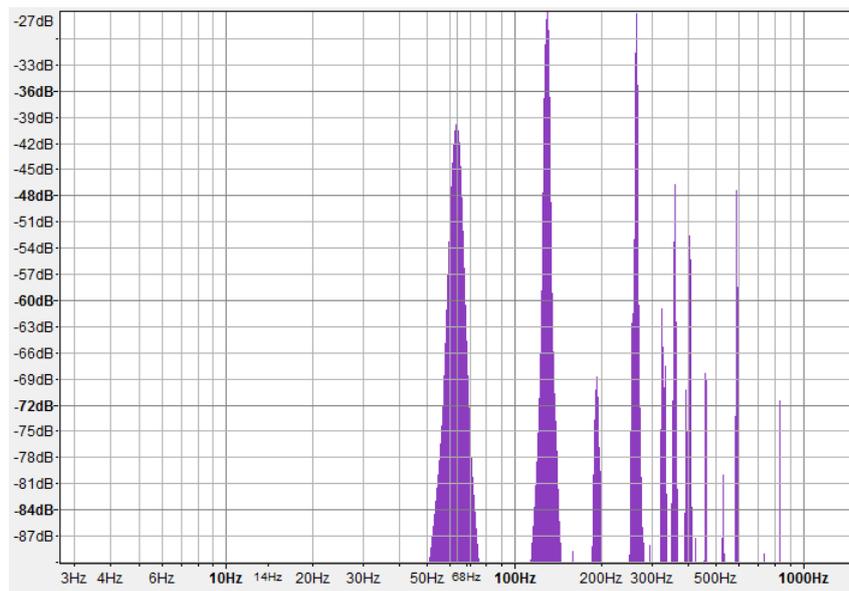


Abbildung 4.3: Spektrum eines Ausschnitts der Aufnahme

4 Evaluierung des Modells

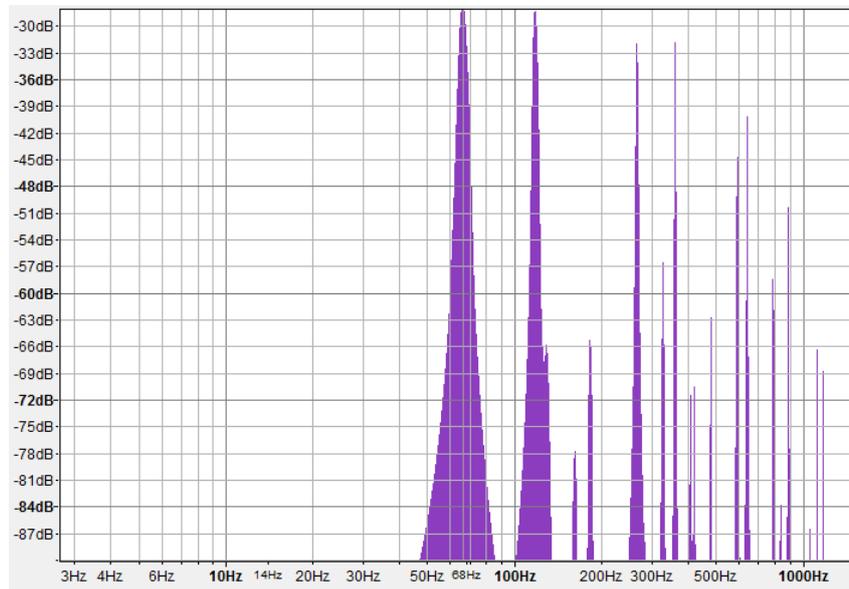


Abbildung 4.4: Spektrum eines Ausschnitts der Synthese

Fazit:

Allgemein bin ich mit meiner Implementierung sehr zufrieden, obwohl der klangliche Unterschied zur echten Platte nicht zu überhören ist. Dies hat verschiedene Gründe, auf die ich hier noch kurz eingehen werde.

Erstens wird davon ausgegangen, dass die Platte in eine unendliche Schallwand eingebaut ist und daher Schall nur von einer Seite abgestrahlt wird. In der Realität ist das natürlich nicht so und hat einen akustischen Kurzschluss zur Folge. Dies bedeutet, dass die tiefsten Moden überhaupt nicht abgestrahlt werden, da sie sich selbst auslöschen. Mein Modell ist daher sehr „basslastig“.

Zweitens sind Plattenglocken meist nicht genau rechteckig, da Kanten und Ecken oft abgerundet sind. Dies zu berücksichtigen würde jedoch das Ausmaß einer Bachelorarbeit übertreffen.

Auch die Durchbohrung und Aufhängung der Platten wird im Modell nicht berücksichtigt. Diese können aber auch Einfluss auf den Klang haben, da Moden, die an dieser Stelle einen Schwingungsbauch haben, stark gedämpft werden.

4 Evaluierung des Modells

Drittens ist die Modellierung des Anschlags sehr vereinfacht. Kein Schlägelkopf erzeugt beim Auftreffen auf der Platte eine Kraftverteilung die genau einem Hann-Window entspricht. Auch die zeitliche Kraftverteilung hat nicht die Form eines Hann-Fensters.

Viertens: Es wird von einem linearen Modell ausgegangen. Demnach werden zum Beispiel Verzerrungen, die durch eine große Auslenkung der Platte entstehen können, ignoriert.

Fünftens ist der genaue Verlauf des Dämpfungsgrads ζ über die Frequenz für die jeweiligen Materialien nicht bekannt. Die Lösung dieses Problems von Aramaki [1] ist auch nur eine Annäherung und spiegelt nicht die Wirklichkeit wider.

Sechstens: Die Berechnung der Modenformen, Anregungsfunktionen und damit auch die Gewichtung der einzelnen Moden passiert numerisch, die Platte wird in $N \times N$ Teile unterteilt. Die Genauigkeit ist daher von der verwendeten Auflösung abhängig. Meistens wurde $N = 250$ gewählt.

Literatur

- [1] Mitsuko Aramaki u. a. »Controlling the perceived material in an impact sound synthesizer«. In: *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 19.2 (2011), S. 301–314 (siehe S. 31, 38).
- [2] HU-Berlin. *Freie gedämpfte Schwingungen*. 2018. URL: <http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/gedaempft.htm> (besucht am 22.05.2018) (siehe S. 29, 30).
- [3] Stefan Bilbao. *Modal Synthesis*. 2006. URL: <https://ccrma.stanford.edu/~bilbao/booktop/node14.html> (besucht am 20.04.2018) (siehe S. 14, 15).
- [4] Antoine Chaigne und Vincent Doutaut. »Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars«. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 101.1 (1997), S. 539–557 (siehe S. 24).
- [5] Neville H Fletcher und Thomas D Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media, 2012 (siehe S. 3, 5, 6, 8, 9).
- [6] Vienna Symphonic Library. *Plattenglocken Sample Pack*. URL: https://www.vsl.co.at/de/Percussions/Plate_bells (besucht am 26.05.2018) (siehe S. 34).
- [7] Sibelius-Akatemia. *Levykellot*. 2018. URL: <http://www2.siba.fi/lyomasoittimet/index.php?id=85&la=fi> (besucht am 27.05.2018) (siehe S. 34).
- [8] Philippe Troccaz, Roland Woodcock und Frédéric Laville. »Acoustic radiation due to the inelastic impact of a sphere on a rectangular plate«. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 108.5 (2000), S. 2197–2202 (siehe S. 29).

Literatur

- [9] McGill University. *Traditional Modal Synthesis*. 2004. URL: <https://www.music.mcgill.ca/~gary/618/week11/node9.html> (besucht am 20.04.2018) (siehe S. 1).
- [10] Kees Van Den Doel und Dinesh K Pai. »Modal synthesis for vibrating objects«. In: *Audio Anecdotes*. AK Peter, Natick, MA (2003), S. 1–8 (siehe S. 1, 2).
- [11] GB Warburton. »The vibration of rectangular plates«. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 168.1 (1954), S. 371–384 (siehe S. 15, 16, 21).
- [12] Wikipedia. *Kreissegment*. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreissegment> (besucht am 20.04.2018) (siehe S. 25).

Anhang A

Im Folgenden wurden für ein paar ausgewählte Randbedingungen jeweils die ersten 9 Modenformen geplottet, siehe auch Abbildung 3.9.

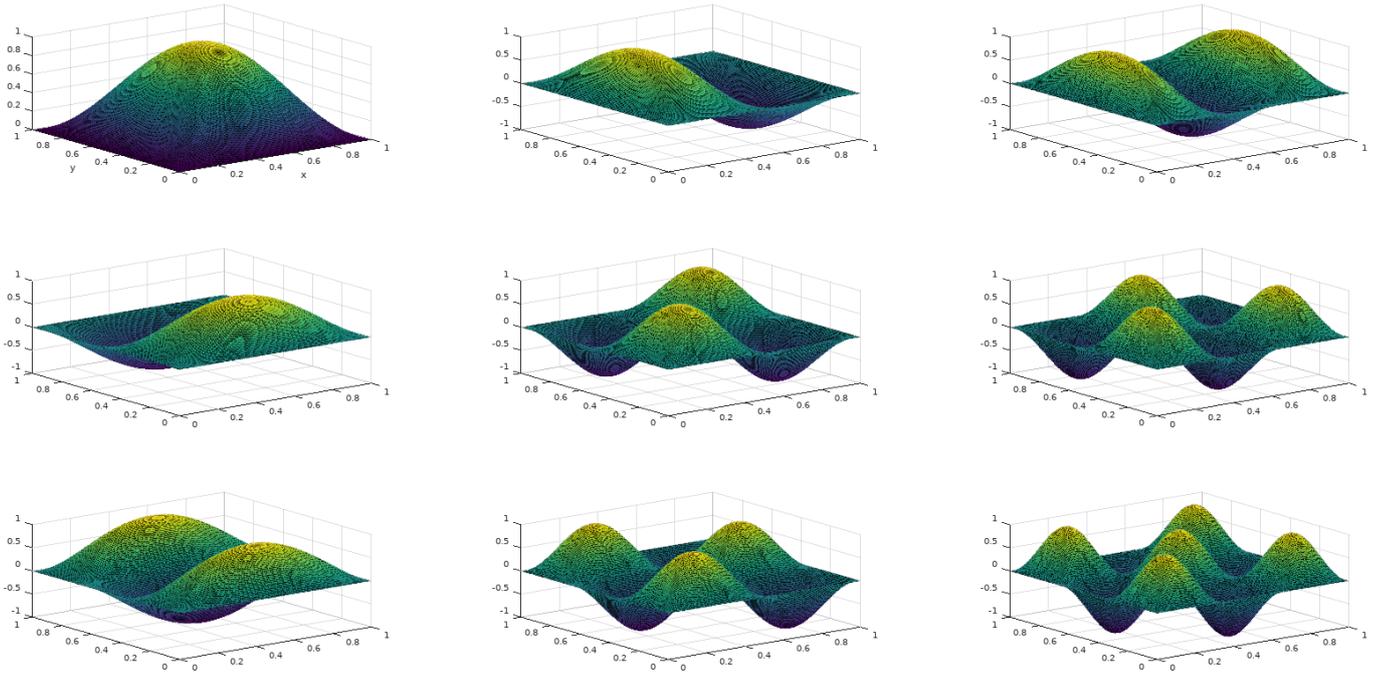


Abbildung 4.1: Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 1

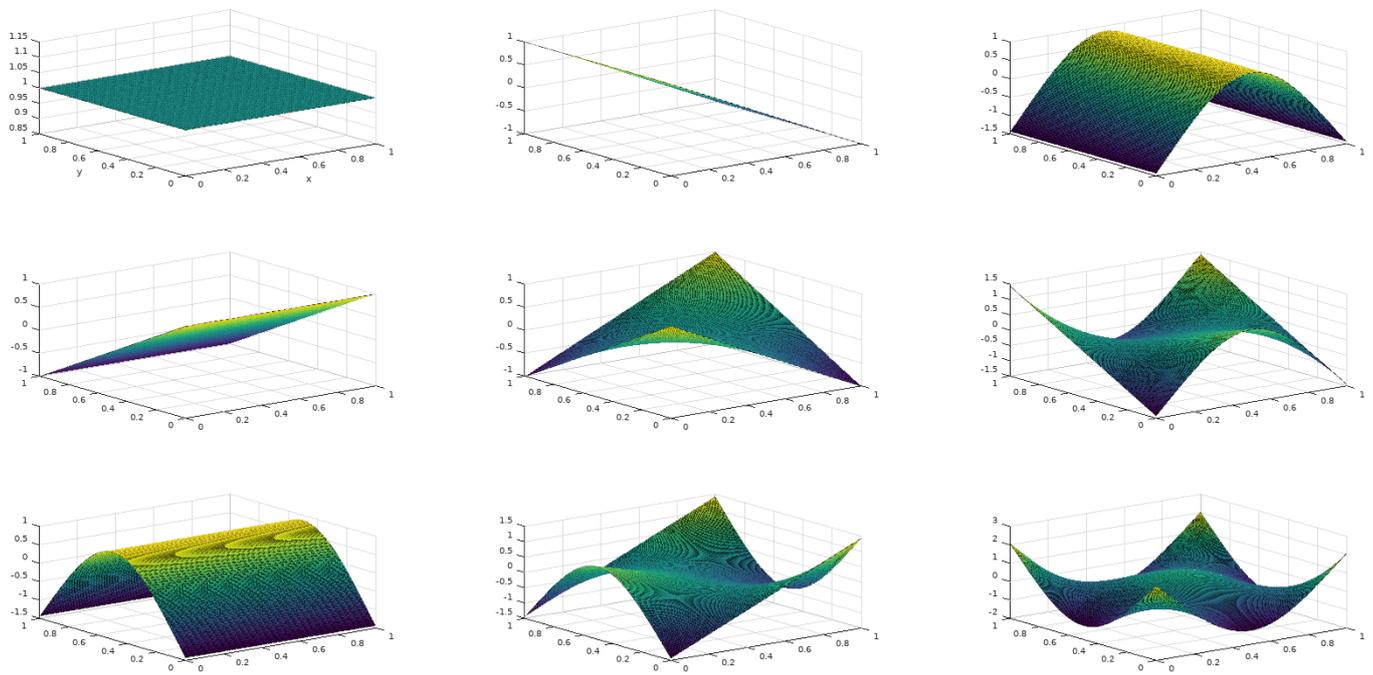


Abbildung 4.2: Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 3

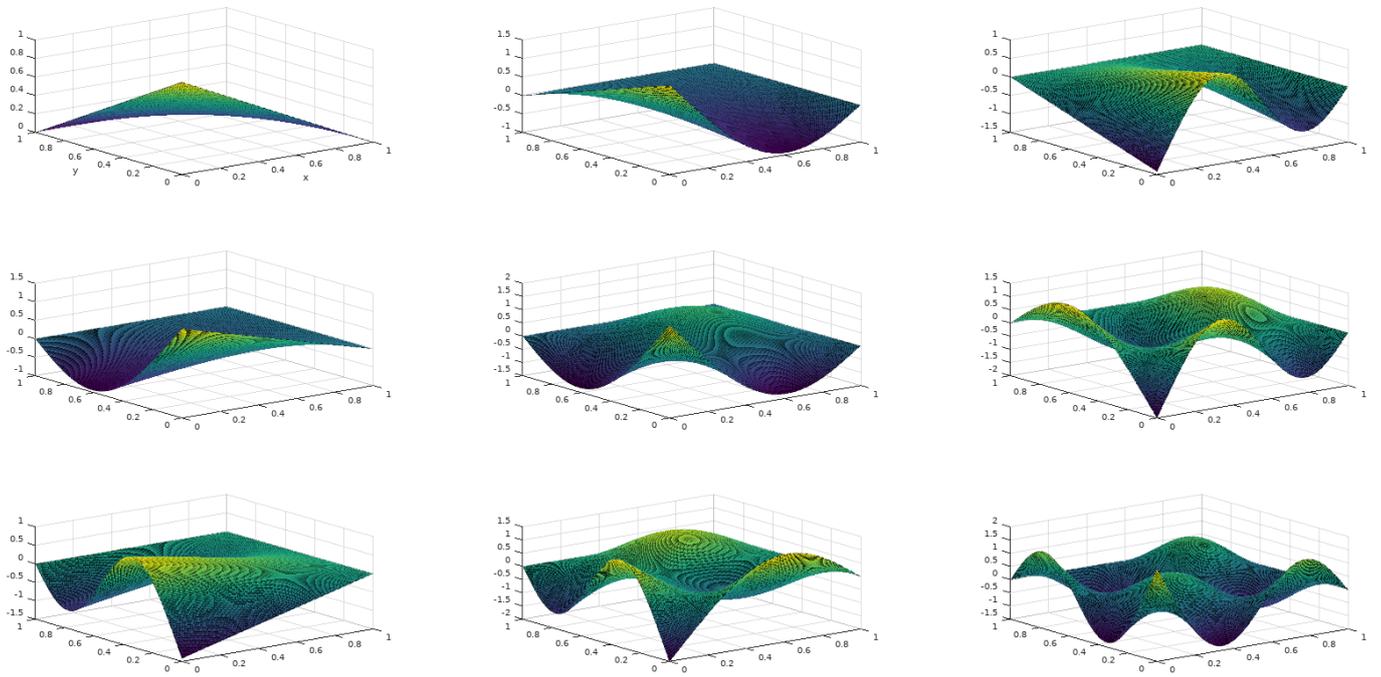


Abbildung 4.3: Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 9

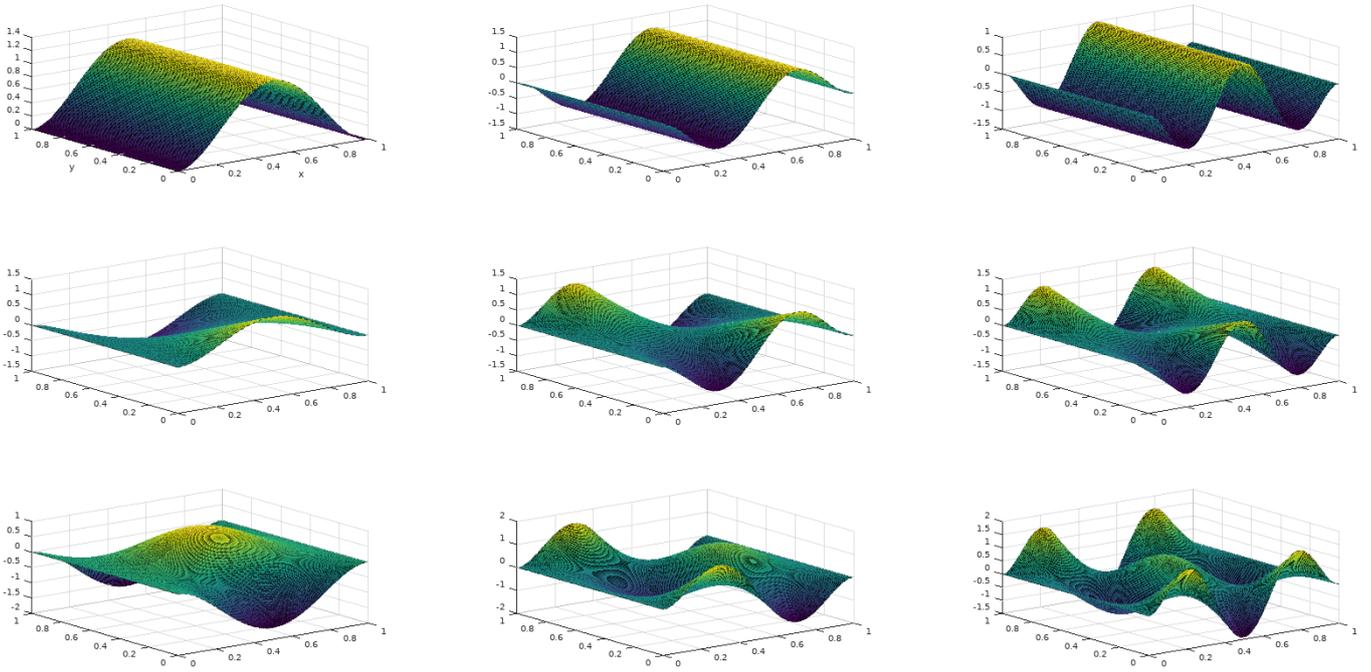


Abbildung 4.4: Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 14

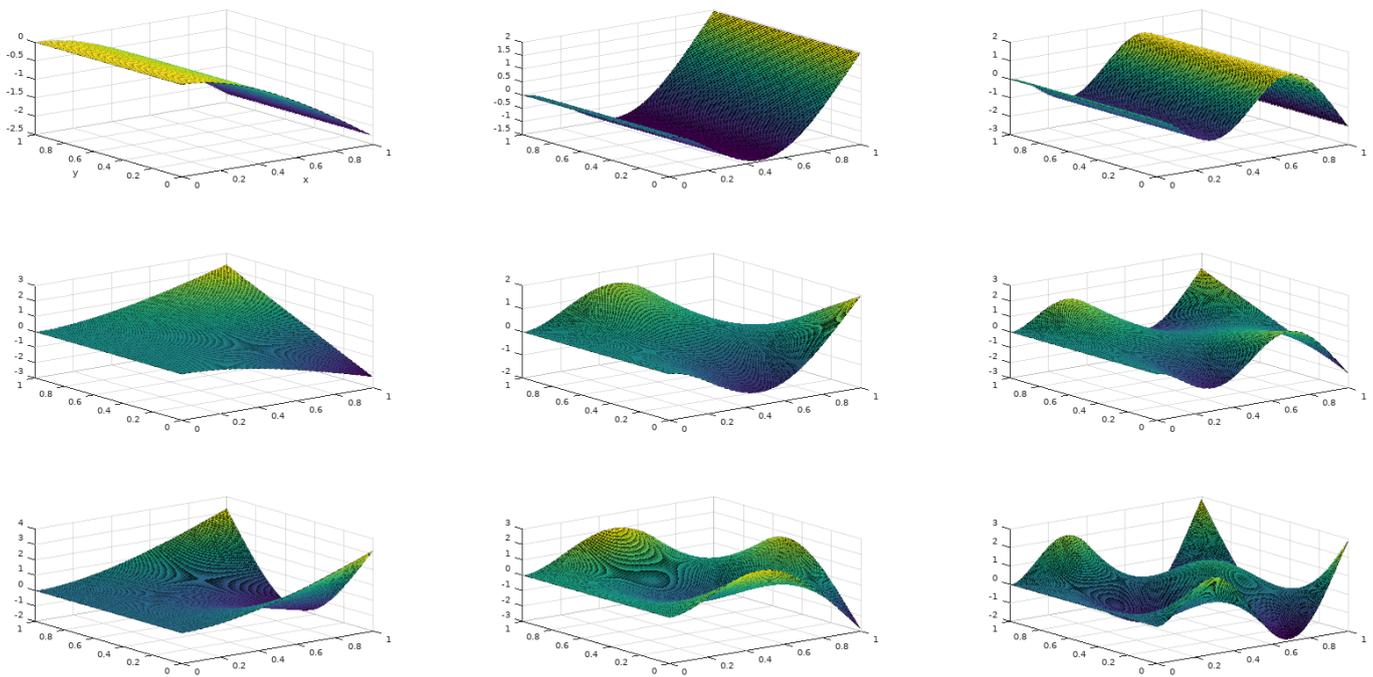


Abbildung 4.5: Die ersten 9 Modenformen für Randbedingung 15

Anhang B

Es folgen Ausschnitte aus dem verwendeten Octave-Code. Dieser ist auch kompatibel mit Matlab.

Das Hauptskript `main()` ruft die beiden Funktionen `calc_frequencies()` und `calc_modenform()` auf, welche jedoch zu lang sind, um sie hier vollständig anzugeben.

`main()`:

```
close all;
clear;
clc;
```

```

Moden_x=16; %Anzahl der Moden in x- und y-Richtung
Moden_y=16;

%%%Stahl%%%
v=0.3;
rho=7700; %kg/m^3
E=180*10^9; %N/m^2
alpha_G=0.3; %frequenzunabhaengige Daempfung
alpha_R=2*10^(-4); %frequenzabhaengige Daempfung

%%%Spanplatte%%%
v=0.25;
rho=680; %kg/m^3
E=4*10^9; %N/m^2
alpha_G=3;
alpha_R=4*10^(-4);

%%%Glas%%%
v=0.25;
rho=2500; %kg/m^3
E=70*10^9; %N/m^2
alpha_G=2.5;
alpha_R=1.5*10^(-4);

l_x=1.86; %Abmessungen in m
l_y=0.88;
h=0.002;
bcond=8; %Boundary Condition (Randbedingungen)

Lambda=calc_frequencies(bcond,Moden_x,Moden_y,l_x,l_y,h,v); %normierte Eigenfrequ.
M=zeros(Moden_x,Moden_y);
M=(Lambda*h*pi)/(l_x^2)*sqrt((E*9.81)/(48*rho*(1-v^2))); %tatsaechliche Frequ.
M=reshape(M',1,[]);
alpha=exp(alpha_G+alpha_R*2*pi*M);
xi=alpha./(2*pi*M);
for m=1:length(M)
if xi(m)<1
M(m)=M(m)*sqrt(1-(xi(m)^2)); %Eigenfrequenzen anpassen
else %xi>1 (overdamped)
M(m)=M(m);
end
end

fs=44100;

```

```

T_sig=7.5; %Laenge des Signals
t=0:1/fs:T_sig-1/fs;
X=zeros(length(M),length(t)+1);

for m=1:length(M)
X(m,1)=M(m); %der 1.Eintrag in jeder Zeile ist die Frequenz
if xi(m)<1
X(m,2:end)=sin(2*pi*M(m)*t);
elseif (xi(m)>=1) && (xi(m)<inf) %xi>1 (overdamped)
X(m,2:end)=(1/(2*2*pi*M(m)*sqrt((xi(m)^2)-1)))*
((exp((-xi(m)-sqrt((xi(m)^2)-1))*2*pi*M(m)*t))-
(exp((-xi(m)+sqrt((xi(m)^2)-1))*2*pi*M(m)*t)));
else %xi=inf
X(m,2:end)=0*t;
end
end

x_anspkt=0.55; %Anschlagspunkt (von 0 bis 1)
y_anspkt=0.215;

N=250; %Aufloesung
Modenform=calc_modenform(bcond,Moden_x,Moden_y,N);
argu=0:1/N:1-1/N; %Argument (0 bis 1)

Anspkt=zeros(N,N);
Anspkt(round(y_anspkt*N),round(x_anspkt*N))=1; %Anschlagspunkt wird gesetzt

r_schlaegel=0.025; %in m
weichheit=0.02; % von 0 bis 1
weichheit=weichheit*r_schlaegel;
sekante=2*sqrt(2*r_schlaegel*weichheit-weichheit^2);
fensterbreite=round((sekante/l_x)*N);
if fensterbreite==0
fensterbreite=1;
elseif fensterbreite==2
fensterbreite=4;
end
hann_window_x=zeros(1,N);
hann_window_y=zeros(1,N);
hann_window_x=hanning(fensterbreite)';
fensterbreite=round(fensterbreite*l_x/l_y);
if fensterbreite==0
fensterbreite=1;
elseif fensterbreite==2

```

```

fensterbreite=4;
end
hann_window_y=hanning(fensterbreite)';
Anschlag_hann=zeros(N,N);
Anschlag_hann=conv2(hann_window_y,hann_window_x,Anspkt,"same");

for m=1:Moden_x %Anregungsfunktion wird mit
for n=1:Moden_y %jeweiliger Mode multipliziert,
A(m,n)=sum(sum(Modenform(:, :, m, n) .*Anschlag_hann)); %dann Sum. ueber alle Elemente
end
end
A=A./N^2; %normieren

A=reshape(A',1, []);

H=zeros(length(M),length(t));
for m=1:length(M)
H(m, :)=exp(-alpha(m)*t); %frequenzabhaengige Daempfung der Moden
if xi(m)<1
X(m,2:end)=X(m,2:end) .*H(m, :);
else %fuer den ueberdaempften Fall ist keine exponentielle Daempfung mehr noetig
X(m,2:end)=X(m,2:end);
end
end

for m=1:length(M)
X(m,2:end)=X(m,2:end) *A(m); %Gewichtung der Moden
end
X=sortrows(X,1);

fmax=16000;
X=X.*(X(:,1)<fmax); %alle Schwingungen ueber fmax werden mit Null multipliziert

out=zeros(1,length(t));
for m=1:length(M) %alle Sinusschwingungen addieren
out=out+X(m,2:end);
end

v_schlaegel=2; %m/s
t_schlaegel=2*weichheit/v_schlaegel;
fensterlaenge=round(t_schlaegel*fs);
if fensterlaenge==0
fensterlaenge=1;
elseif fensterlaenge==2

```

```

fensterlaenge=4;
end
hann_window_t=hanning(fensterlaenge)';
out=conv(out,hann_window_t);

out=out/max(abs(out)); %normalisieren
p=audioplayer(out,fs);
play(p);

```

Ausschnitt aus calc_frequencies():

```

function [Lambda] = calc_frequencies (bcond,Moden_x,Moden_y,l_x,l_y,h,v)
% Die Funktion berechnet die dimensionslosen Eigenfrequenzen einer rechteckigen
% Platte nach G. B. Warburton und gibt diese in einer Matrix aus.
% Dimension der Matrix ... Moden_x x Moden_y
% Weitere Parameter: bcond ... Randbedingungen
%                   l_x,l_y,h ... Abmessungen der Platte
%                   v ... Poissonzahl

Lambda=zeros (Moden_x,Moden_y) ;

if bcond==1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
index_m=1;
for m=2:Moden_x+1
index_n=1;
for n=2:Moden_y+1
G_x=m-1;
H_x=(m-1)^2;
J_x=(m-1)^2;
G_y=n-1;
H_y=(n-1)^2;
J_y=(n-1)^2;
Lambda (index_m,index_n)=sqrt (G_x^4+(G_y^4)*(l_x^4/l_y^4)+(2*l_x^2/l_y^2)*
(v*H_x*H_y+(1-v)*J_x*J_y));
index_n=index_n+1;
endfor
index_m=index_m+1;
endfor
elseif bcond==2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
index_m=1;
for m=2:Moden_x+1
index_n=1;
for n=2:Moden_y+1

```

```

if m==2
G_x=1.506;
H_x=1.248;
J_x=1.248;
else
G_x=m-1/2;
H_x=(m-1/2)^2*(1-(2/((m-1/2)*pi)));
J_x=(m-1/2)^2*(1-(2/((m-1/2)*pi)));
endif
if n==2
G_y=1.506;
H_y=1.248;
J_y=1.248;
else
G_y=n-1/2;
H_y=(n-1/2)^2*(1-(2/((n-1/2)*pi)));
J_y=(n-1/2)^2*(1-(2/((n-1/2)*pi)));
endif
Lambda(index_m,index_n)=sqrt(G_x^4+(G_y^4)*(1-x^4/1-y^4)+(2*1-x^2/1-y^2)*
(v*H_x*H_y+(1-v)*J_x*J_y));
index_n=index_n+1;
endfor
index_m=index_m+1;
endfor
elseif bcond==3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
.
.
.
.
.

elseif bcond==15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
index_m=1;
for m=1:Moden_x
index_n=1;
for n=0:Moden_y-1
if m==1
G_x=0.597;
H_x=-0.0870;
J_x=0.471;
elseif m==2
G_x=1.494;
H_x=1.347;

```

```

J_x=3.284;
else
G_x=m-1/2;
H_x=(m-1/2)^2*(1-(2/((m-1/2)*pi)));
J_x=(m-1/2)^2*(1+(2/((m-1/2)*pi)));
endif
if n==0
G_y=0;
H_y=0;
J_y=0;
elseif n==1
G_y=0;
H_y=0;
J_y=12/pi^2;
elseif n==2
G_y=1.506;
H_y=1.248;
J_y=5.017;
else
G_y=n-1/2;
H_y=(n-1/2)^2*(1-(2/((n-1/2)*pi)));
J_y=(n-1/2)^2*(1+(6/((n-1/2)*pi)));
endif
Lambda(index_m,index_n)=sqrt(G_x^4+(G_y^4)*(l_x^4/l_y^4)+(2*l_x^2/l_y^2)*
(v*H_x*H_y+(1-v)*J_x*J_y));
index_n=index_n+1;
endfor
index_m=index_m+1;
endfor
else
disp("Boundary Condition doesn't exist");
endif

end

```

Ausschnitt aus `calc_modenform()`:

```

function [Modenform] = calc_modenform (bcond,Moden_x,Moden_y,N)
%calc_modenform computes mode shapes for rectangular plates
%   for various combinations boundary conditions
%   TODO: missing modes for square plates

Modenform = zeros (N,N,Moden_x,Moden_y);

```

```

argu = linspace(0,1,N); % Argument (0 bis 1), N samples lang

maxmodes = max([Moden_x,Moden_y]);

for dl=1:3
gamma{dl} = dlmread(sprintf('./gamma_%d.txt',dl),''); % read in zeros
end

% make all gammas same size
gammalen = min([length(gamma{1}), length(gamma{2}), length(gamma{3})]);
for dl=1:3
gamma{dl} = gamma{dl}(1:gammalen);
end

% Boundary conditions of edges
% Order: left right bottom top
% S ... simply-supported / hinged / freely-supported
% C ... clamped / fixed
% F ... free

if bcond==1 % SS SS
for dl=1:Moden_x
m = dl;
theta_x = sin(m*pi*argu);
for d2=1:Moden_y
n = d2;
theta_y = sin(n*pi*argu);
Modenform(:, :, dl, d2) = theta_y'*theta_x; %Modenform in 4D-Matrix schreiben
end
end
elseif bcond==2 % CC CC
gamma_even = gamma{1};
gamma_odd = gamma{2};
k_even = sin(gamma_even/2)./sinh(gamma_even/2);
k_odd = -sin(gamma_odd/2)./sinh(gamma_odd/2);
k = reshape([k_even k_odd]', [], 1);
gamma = reshape([gamma_even gamma_odd]', [], 1);
for dl=1:Moden_x
m = 2 + dl;
if mod(m-1,2)==0
theta_x = cos(gamma(m)*(argu-1/2)) + k(m)*cosh(gamma(m)*(argu-1/2));
else
theta_x = sin(gamma(m)*(argu-1/2)) + k(m)*sinh(gamma(m)*(argu-1/2));
end
end

```

```

for d2=1:Moden_y
n = 2 + d2;
if mod(n-1,2)==0
theta_y = cos(gamma(n)*(argu-1/2)) + k(n)*cosh(gamma(n)*(argu-1/2));
else
theta_y = sin(gamma(n)*(argu-1/2)) + k(n)*sinh(gamma(n)*(argu-1/2));
end
Modenform(:, :, d1, d2) = theta_y'*theta_x;
end
end
elseif bcond==3 % FF FF
gamma_even = gamma{1};
gamma_odd = gamma{2};
k_even = -sin(gamma_even/2)./sinh(gamma_even/2);
k_odd = sin(gamma_odd/2)./sinh(gamma_odd/2);
k = reshape([k_even k_odd]', [], 1);
gamma = reshape([gamma_even gamma_odd]', [], 1);
for d1=1:Moden_x
m = d1;
if m==1
theta_x = ones(size(argu));
elseif m==2
theta_x = 1 - 2*argu;
else
if mod(m-1,2)==0
theta_x = cos(gamma(m)*(argu-1/2)) + k(m)*cosh(gamma(m)*(argu-1/2));
else
theta_x = sin(gamma(m)*(argu-1/2)) + k(m)*sinh(gamma(m)*(argu-1/2));
end
end
for d2=1:Moden_y
n = d2;
if n==1
theta_y = ones(size(argu));
elseif n==2
theta_y = 1 - 2*argu;
else
if mod(n-1,2)==0
theta_y = cos(gamma(n)*(argu-1/2)) + k(n)*cosh(gamma(n)*(argu-1/2));
else
theta_y = sin(gamma(n)*(argu-1/2)) + k(n)*sinh(gamma(n)*(argu-1/2));
end
end
Modenform(:, :, d1, d2) = theta_y'*theta_x;

```

```

end
end
elseif bcond==4 % CS CC
    .
    .
    .
    .
    .

elseif bcond==15 % CF FF
gamma_x = gamma{3};
k_x = (sin(gamma_x)-sinh(gamma_x))./(cos(gamma_x)-cosh(gamma_x));
gamma_y_even = gamma{1};
gamma_y_odd = gamma{2};
k_y_even = -sin(gamma_y_even/2)./sinh(gamma_y_even/2);
k_y_odd = sin(gamma_y_odd/2)./sinh(gamma_y_odd/2);
k_y = reshape([k_y_even k_y_odd]', [], 1);
gamma_y = reshape([gamma_y_even gamma_y_odd]', [], 1);
for d1=1:Moden_x
m = d1;
theta_x = cos(gamma_x(m)*argu) - cosh(gamma_x(m)*argu) - k_x(m)*(sin(gamma_x(m)*argu)
for d2=1:Moden_y
n = d2;
if n==1
theta_y = ones(size(argu));
elseif n==2
theta_y = 1 - 2*argu;
else
if mod(n-1,2)==0
theta_y = cos(gamma_y(n)*(argu-1/2)) + k_y(n)*cosh(gamma_y(n)*(argu-1/2));
else
theta_y = sin(gamma_y(n)*(argu-1/2)) + k_y(n)*sinh(gamma_y(n)*(argu-1/2));
end
end
Modenform(:, :, d1, d2) = theta_y'*theta_x;
end
end
else % otherwise
disp('Boundary Condition does not exist');
end

end

```